論文審査結果の要旨

氏　名　　及川　一誠

本論文は,

Part I.　Hybridized Discontinuous Galerkin Method for Convection–Diffusion-Reaction Problems (SIAM Journal of Numerical Analysis に投稿中)

Part II. Hybridized Discontinuous Galerkin Method with Lifting Operator (JSIAM Letters, vol. 2, 2010 に掲載済み)

の２部からなり，楕円型偏微分方程式に対する，不連続ガレルキン有限要素法(DGFEM)の数学的基礎理論に寄与するものである．DGFEM とは，偏微分方程式に対する離散化手法の一つである．通常の有限要素法(FEM)は，偏微分方程式の弱形式において，問題が定式化されている関数空間（ソボレフ空間）を有限要素空間に置き変えることで得られる．これは，ガレルキン近似の特別な場合であり，理論的にはとても扱いやすい．しかし，現実の様々な問題に対しては，不足な点も多く，近年，より一般的な近似の枠組みとして提案されたのが DGFEM である．この方法では，微分方程式を解く領域を，２次元なら多角形，３次元なら多面体で分割する（これを要素と呼ぶ）．この際，様々な種類の多角形・多面体の混在を許す. そして, 近似関数を, 各要素上の多項式とするが, 要素毎に，多項式の次数が定義される．そうすると，かなり一般的な近似を考えることができるが，その代わり，要素境界上で不連続性が生じる．その不連続性を，近似方程式を定式化する際に，フラックス・バランス項や，ペナルティー項を導入することで制御するのが基本的な考えである．この方法は，数学的な性質も，計算結果も，とても良好であるが，一方で，近似方程式の次元がとても大きくなるという難点がある．この欠点を克服するために，要素の境界上にあらたに未知数を配置して，これも考慮して近似方程式を導く．要素内の未知数と要素境界上の未知数の２種類が出てくるので，これをハイブリッド型と呼ぶわけである. この方法では, 境界内部の未知数をうまく消去でき, 結果として要素境界上の未知数だけの方程式になるので, 計算の手間を激減することが可能となるのである.

本論文の第 I 部では，時間的には定常だが，拡散と移流の効果を含む偏微分方程式である移流拡散反応方程式に対する DGFEM を詳細に研究している. 拡散と移流の効果は, 微分方程式のレベルでは何の問題もないが, 方程式を離散化して有限次元近似を施すと, これらは大変相性が悪く, これを制御することは現在でも大きな問題として認識されている．より，具体的には，微分方程式とは関係のない，離散化したことによる数値的振

動が生じ，解が破綻するのである．特に，拡散の効果が小さいときが問題となる．普通は, 移動の項を上流化や安定化という方法で近似して, 近似スキーム自体を安定化する．そうすると，計算は安定になるが，その代わりに，精度の損失がある．本論文では，解の精度を保ったまま常に安定に計算が遂行できる DGFEM スキームを提案して, 詳細な安定性解析，収束解析を行っている．また，実際に，いろいろな数値計算を実行し，理論の正当性を検証している．提案のスキームの良いところは，拡散の大きさとは全く独立に安定化がなされているところで, これは過去の上流近似や安定化手法の膨大な研究と比較しても，前例がなく，画期的で個性的ある．移流拡散方程式の離散化手法としては，ほぼ最良のものが得られたと言える．また拡散が十分に小さいときには，計算が良好であるにせよ，ないにせよ，通常の有限要素法の誤差解析の手法は役に立たないが，本論文では，この場合の数値解の善し悪しを説明するための定理を定式化しており，この点も高く評価できる．

一方，第 II 部では，ポワッソン方程式をモデル問題にして，拡散安定化項における，ペナルティーパラメータの選択について議論している．スキームの安定化のためには，このペナルティーパラメータの果たす役割は，決定的に重要である．しかし，従来のスキームでは，このパラメータをある範囲から選べば良い，ということはわかっても，その具体的な範囲を特定することは難しく, 計算してみなければわからないという問題があった．しかし，本論文では，拡散項の安定化の際に，リフティング作用素を導入し，ペナルティーパラメータと近似解をより具体的に関連づけると言う新しい手法が提案され, 結果的に, 任意の正数がペナルティーパラメータとして採用できるようになった．これにより，DGFEM の応用範囲は，大いに拡大することとなった．

DGFEM は, 国際的に非常に競争の激しい分野であり, この分野で, 独自性, 有用性, 数学的正当性のすべて兼ね備えた結果を出したことは，高く評価できる．また，本論文の解析手法により, ハイブリッド型の DGFEM の有用性が再確認され, 今後, ナヴィエ・ストークス方程式などの，現実の非線型問題への適用や解析が劇的に進展することが，期待できるようになった．

よって，論文提出者　及川一誠，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしいと充分な資格があると認める．