論文の内容の要旨

論文題目　**Polynomial relations for q-characters via the ODE/IM correspondence (ODE/IM 対応を用いた q 指標の多項式関係)**

氏名　**Juanjuan Sun (孫　娟娟)**

$U_q(\mathfrak{g})$ を $X_n^{(1)}$ 型量子アフィン代数 $(X = A, B, C, D)$, $U_q(\mathfrak{b})$ をその Borel 部分代数とする。この論文では, 量子可積分モデルにおける ODE/IM 対応を手がかりとして, $U_q(\mathfrak{b})$ のあるクラスの表現に対し, それらの q 指標が満たす多項式関係の予想を提出する。

まず動機と背景について説明する。量子可積分系において Baxter の Q 作用素という重要な概念がある。Q 作用素の固有値は Bethe 根の母関数であり, 転送行列は Q 作用素の有理関数として表示できる。この意味で Q 作用素はモデルのスペクトルの研究にもっとも基本的な役割を果たす。XXZ モデルなどのいわゆる trigonometric なモデルでは, Q 作用素は量子アフィン代数の普遍 R 行列から代数的に構成されるが (Bazhanov et al.1997), 転送行列の場合と異なって, 量子アフィン代数の有限次元表現の代わりに Borel 部分代数の無限次元表現が用いられる。

$U_q(\mathfrak{g})$ の Kirillov-Reshetikhin(KR) 加群に対応する転送行列は T system と呼ばれる関係式を満たす。これらは q 指標の関係式として定式化され証明されており (Nakajima 2003, Hernandez 2006), さらに Grothendieck 環の定義関係式であることも明らかにされている (Inoue et al. 2010)。これらの事情を考えると, Q 作用素, あるいはそれに対応する Borel 部分代数の q 指標 (Hernandez et al. 2011) の満たす関係式を研究することは基本的な問題と思われる。$A_n^{(1)}$ 型の代数の場合には quantum Wronskian と呼ばれる関係式がわかっているが, 一般の場合に系統的な研究はなされていない。本論文ではその第 1 歩として, $X_n^{(1)}$ 型の場合に自明でない関係式を探すことを問題とする。

関係式を探る手がかりとして, 我々はいわゆる ODE/IM 対応に着目する。共形場理論において, Virasoro Verma 加群の各次数の部分空間に働く作用素として Q 作用素を実現することができる。このとき真空ベクトルにおける Q 作用素の固有値が, ある 2 階シュレディンガー作用素のスペクトル行列式 (原点と無限遠のあいだの接続係数) に一致する (Dorey et al., Bazahnov et al. 1999)。Q 作用素の固有値と常微分方程式の接続係数のあいだのこのような対

応は ODE/IM 対応と呼ばれる。 Affine Gaudin モデルの枠組みでの解釈 (Feigin et al. 2005) も提案されているが, その本質は未解明である。Dorey et al. 2007 は ODE/IM 対応を $X_n^{(1)}$ 型アフィン・リー代数の場合に拡張し, 接続係数の関係式が Bethe 方程式を再現することを示した。我々はこの論文の方法を整理拡充し, $U_q(\mathfrak{b})$ の q 指標の関係式について予想を立てるために利用する。

以下, 本論文の内容を述べる。上述のとおり $\mathfrak{g}$ を $X_n^{(1)}$ 型アフィン・リー代数とし, Langlands 双対 ${}^L\mathfrak{g}$ の基本表現を $V^{(a)}$ とする (a は対応する単純リー代数 ${}^L\mathring{\mathfrak{g}}$ の Dynikin 図形の node, $V^{(a)}$ は ${}^L\mathring{\mathfrak{g}}$ の基本表現を最高成分とする ${}^L\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現である)。本論文では次のことを行う:

(1) 基本表現 $V^{(a)}$ の各ウエイトに対し, 形式級数 $\mathcal{Q}^{(a)}_{J,z}$ 或は $\mathcal{R}^{(a)}_{\epsilon,z}$ を対応させる。(J, ε などは $V^{(a)}$ のウエイトの index である。論文の Section 4 を参照) 簡単な因子を除いて, これらは $U_q(\mathfrak{b})$ の既約最高 ℓ-ウェイト表現の q 指標であることを期待する。

(2) 形式級数 $\mathcal{Q}^{(a)}_{J,z}$ と $\mathcal{R}^{(a)}_{\epsilon,z}$ を ODE/IM 対応における接続係数と対応させ, 後者の満たす関係式から前者の間の多項式関係を予想する。

(3) (2) の関係式について, $A_n^{(1)}$ 型の場合に証明を与える。他の場合については特殊な場合の証明, 計算機による検証, および指標に特殊化した関係式の証明を与える。

(1) について説明する。まずベクトル表現 $V^{(1)}$ の場合に, KR 加群の q 指標の tableaux 表示から適当な極限をとることにより, $V^{(1)}$ の各ウェイト i に対して形式級数 $\mathcal{Q}^{(1)}_{i,z}$ の具体形を与える。最高または最低ウェイトについては, 簡単な因子を除きこれらが既約 q 指標を与えることがわかっている (Hernandez et al. 2011)。一般の基本表現 $V^{(a)}$ については, ‘スピン表現’ の場合 ($\mathfrak{g} = C_n^{(1)}$, $a = n$ または $\mathfrak{g} = D_n^{(1)}$, $a = n-1, n$) を除き形式級数 $\mathcal{Q}^{(a)}_{J,z}$ を $\mathcal{Q}^{(1)}_{i,z}$ の行列式で与える。‘スピン表現’ の場合に ($C_2^{(1)}$, $D_4^{(1)}$ を除き) 対応する形式級数 $\mathcal{R}^{(a)}_{\epsilon,z}$ は, 具体形を知る手段がないため, 対応するべき最高 ℓ-ウェイトの規則だけを提出する。なお $C_n^{(1)}$ 型の場合には本論文で与える $\mathcal{Q}^{(a)}_{J,z}$ の定義は暫定的なものである (論文の Example 4.3, Remark 5.9 を参照)。

(2) について, 上述の形式級数 $\mathcal{Q}^{(a)}_{J,z}$ と $\mathcal{R}^{(a)}_{\epsilon,z}$ のみたすべき関係式を説明する。以下 index $J = (j_1, \cdots, j_a) \in \mathcal{J}^a$ は $j_1 \prec \cdots \prec j_a$ を満たすものとする ($\mathcal{J}$, $\prec$ および $x_i = e^{\epsilon_i}$ の定義は Subsection 4.2)。 x_J, X_J, $x_{j,J}$ は x_i のある monomial である (Section 5 又は (5.4))。

(i) $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ (Proposition 5.1):

$$\mathcal{Q}^{(a)}_{J_1,q_1^{-1}z}\mathcal{Q}^{(a)}_{J_2,q_1 z} - \mathcal{Q}^{(a)}_{J_1,q_1 z}\mathcal{Q}^{(a)}_{J_2,q_1^{-1}z}\frac{x_{J_1}}{x_{J_2}} = \sum_{k=1}^{a}(-1)^k \mathcal{Q}^{(a-1)}_{J_2-j_k,z}\mathcal{Q}^{(a+1)}_{(j_k,J_1),z}x_{j_k}^{-1}.$$

(ii) $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$ (Theorem 5.2):

$$\det\left(\mathcal{Q}^{(1)}_{\nu,q^{-2\mu+n+2}z}x_\nu^{-\mu+\nu}\right)_{\mu,\nu=1}^{n+1} = 1\,.$$

(iii) $\mathfrak{g} = B_n^{(1)}$ (Conjecture 5.3):

$$\begin{aligned}&\mathcal{Q}^{(n)}_{\overline{J_1^*},z}\mathcal{Q}^{(n)}_{J_2,qz}X_{\overline{J_1^*}}X_{J_2}x_{J_1}^{-\frac{1}{2}} - \mathcal{Q}^{(n)}_{\overline{J_2^*},z}\mathcal{Q}^{(n)}_{J_1,qz}X_{\overline{J_2^*}}X_{J_1}x_{J_2}^{-\frac{1}{2}}\\ &= -\sum_{k=1}^{n}\mathcal{Q}^{(n-1)}_{J_2-j_k,z}\mathcal{Q}^{(n-1)}_{\overline{J_1^*}-\overline{j_k},qz}X_{J_2-j_k}X_{\overline{J_1^*}-\overline{j_k}}\frac{x_{j_k,J_1}}{x_{j_k,J_2}}x_{J_1}^{-\frac{1}{2}}x_{j_k}^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

(iv) $\mathfrak{g} = C_n^{(1)}$ (Conjecture 5.5-5.8)

(v) $\mathfrak{g} = D_n^{(1)}$ (Conjecture 5.10-5.11)

(i) は形式級数 $\mathcal{Q}_{J,z}^{(a)}$ の定義式と同値なので, nontrivial な結果は (ii)-(v) である。(iii), (iv) の式は複雑なのでここには述べない。

最後に (3) について説明する。(ii) は直接の計算により, Appendix B で証明する。(iii)-(v) の予想については, q 指標を指標に特殊化したとき成立することを Appendix C-D で証明する。(iii) の予想は $\mathfrak{g} = B_2^{(1)}$ の時, 直接の計算で証明した。また $\mathfrak{g} = B_3^{(1)}$ の場合, 計算機である次数まで確認している。(v) についても, $\mathfrak{g} = D_4^{(1)}$ の場合に計算機による確認を行った。(iv) については $C_2^{(1)}$ の場合 $B_2^{(1)}$ の式に帰着するので正しいが, それ以外の場合については, 級数の具体形を持っていないため計算機による検証はできていない。