論文の内容の要旨

論文題目: How to estimate Seshadri constants
（セシャドリ定数を評価する方法）

氏名: 伊藤敦

1　はじめに

代数多様体などはすべて複素数体上で考える．Seshadri 定数とは Demailly [Dem] により定義された以下のような不変量である．

定義 1.1. 対 (X, L) を偏極代数多様体, $p \in X$ を閉点とする．この時, L の p における *Seshadri* 定数 $\varepsilon(X, L; p)$ を

$$\varepsilon(X, L; p) = \inf_C \frac{C.L}{\mathrm{mult}_p(C)}$$

と定義する．ここで C は p を通る X 上のすべての曲線を動く．

定義 1.2. 対 (X, L) を偏極代数多様体とする．*Seshadri* 定数はある種の下半連続性をもつので, 非常に一般な点で L の *Seshadri* 定数は一定になる．従って, 非常に一般な点における L の *Seshadri* 定数 $\varepsilon(X, L; 1)$ を

$$\varepsilon(X, L; 1) := \varepsilon(X, L; p)$$

と定義できる．ここで $p \in X$ は非常に一般な点とする．

同様にして多重点の場合も以下のように定義できる．重み $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}^r$ に対し, $\varepsilon(X, L; \overline{m})$ を

$$\varepsilon(X, L; \overline{m}) = \inf_C \frac{C.L}{\sum_{i=1}^r m_i \,\mathrm{mult}_{p_i}(C)}$$

と定義する．ここで $p_1, \ldots, p_r \in X$ は非常に一般な点であり, C は少なくとも 1 つの p_i を通る X 上のすべての曲線を動く．

Seshadri 定数は様々な興味深い性質を持ち, また他の概念とも関わっていることが分かっている (cf. [La, Chapter 5])．しかしながら与えられた偏極代数多様体に対し, 具体的に Seshadri 定数を計算することは非常に難しい．特に高次元の場合には知られている計算例が極めて少ない状況である．

定義からわかるように Seshadri 定数の上からの評価は比較的得られやすい．つまり $C.L$ が小さく $\mathrm{mult}_p(C)$ が大きい曲線 C を見つけてやれば良い．一方下からの評価については有効な方法は余り知られていない．本論文では任意次元における Seshadri 定数の（特に下からの）評価方法を調べた．

2 Cayley 多面体の代数幾何的特徴付け

まず Cayley 多面体と r-平面を以下のように定義する．

定義 2.1. 自然数 r に対し，整多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ が長さ $r+1$ の *Cayley* 多面体であるとは，ある全射群準同型 $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^r$ から誘導される線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ による P の像が r 次元ユニモジュラー単体になることとする．

定義 2.2. 自然数 r に対し，$(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1))$ と同型な偏極代数多様体を r-平面と呼ぶ．偏極代数多様体 (X, L) が r-平面で覆われるとは一般の点 $p \in X$ に対し，p を含む部分多様体 $Z \subset X$ で $(Z, L|_Z)$ が r-平面であるものが存在することとする．$r = 1$ の時は，直線で覆われると呼ぶこととする．

第 2 章では，次を証明した．

定理 2.3 (=Theorem 2.1.1)**.** *$P \subset \mathbb{R}^n$ を次元 n の整多面体とする．この時 P が長さ $r+1$ の Cayley 多面体であることと P に対応する偏極トーリック多様体 (X_P, L_P) が r-平面で覆われることは同値である．*

この定理を用いて，$\varepsilon(X_P, L_P; 1_P) = 1$ となる整多面体 P の具体的な記述を得た;

定理 2.4 (=Theorem 2.1.2)**.** *$P \subset \mathbb{R}^n$ を次元 n の整多面体とする．この時以下は同値である;*

i) P は長さ 2 の *Cayley* 多面体である，
ii) (X_P, L_P) は直線で覆われる，
iii) $\varepsilon(X_P, L_P; p) = 1$ が任意の $p \in X_P$ で成り立つ，
iv) $\varepsilon(X_P, L_P; 1_P) = 1$ がトーラスの単位元 $1_P \in (\mathbb{C}^\times)^n \subset X_P$ で成り立つ．

3 トーリック退化を用いた Seshadri 定数の評価

第 3 章ではまず n 次元整多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ とその面 σ に対し，不変量 $s_1(P;\sigma), s_2(P;\sigma)$ を定義した．この不変量を用いて以下の定理を示した;

定理 3.1 (=Theorem 3.1.1)**.** *$P \subset \mathbb{R}^n$ を次元 n の整多面体，σ を P の面とする．この時，*

$$s_1(P;\sigma) \leq \varepsilon(X_P, L_P; p) \leq s_2(P;\sigma)$$

が任意の $p \in O_\sigma$ について成り立つ．ここで $O_\sigma \subset X_P$ は σ に対応する軌道である．

ここで注意すべきことは，$s_1(P;\sigma), s_2(P;\sigma)$ が $\varepsilon(X_P, L_P; p)$ に比べ計算しやすいということである．さらにしばしば $s_1(P;\sigma) = s_2(P;\sigma)$ が成立するので，その場合は $\varepsilon(X_P, L_P; p)$ が計算できる．
定義 1.2 で述べたように Seshadri 定数は下半連続性を持つ．従って，トーリック退化を考えることで様々な場合の Seshadri 定数の下界を求める事ができる．

定理 3.2 (=Theorem 3.1.3)**.** *$X_d^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を次数 d の非常に一般な超曲面とする．この時*

$$\lfloor \sqrt[n]{d/(m_1^n + \cdots + m_r^n)} \rfloor \leq \varepsilon(X_d^n, \mathcal{O}(1); \overline{m}) \leq \sqrt[n]{d/(m_1^n + \cdots + m_r^n)}$$

が任意の $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in (\mathbb{N} \setminus 0)^r$ に対して成り立つ．

特に

$$\lfloor \sqrt[n]{d} \rfloor \le \varepsilon(X_d^n, \mathcal{O}(1); 1) \le \sqrt[n]{d}$$

が成り立つ.

定理 3.3 (=Theorem 3.1.5). *Picard* 数が 1 の滑らかな *Fano 3* 次元代数多様体の各族に対し*, (*そのような族は *17* 個ある*),* $\varepsilon(X, -K_X; 1)$ は論文中の表 3.1 の様になる. ここで X は族の中の非常に一般の元とする.

4 Seshadri 定数と Okounkov 体

第 4 章ではまず, 代数多様体 X 上の双有理（ある種の正値性を保証する条件）な次数付き線形系 $W_\bullet$ と重み $\overline{m}$ に対し非常に一般の点における重み $\overline{m}$ の Seshadri 定数 $\varepsilon(W_\bullet; \overline{m})$ を定義した. 非常に一般の点での Seshadri 定数は巨大な因子については Nakamaye [Na] により定義されており, $\varepsilon(W_\bullet; \overline{m})$ はその自然な一般化である.

$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元凸集合とすると, $(\mathbb{C}^\times)^n$ 上の双有理な次数付き線形系 $W_{\Delta,\bullet} := \{V_{k\Delta}\}_k$ が定まる. ここで $V_{k\Delta} = \bigoplus_{u \in k\Delta \cap \mathbb{Z}^n} \mathbb{C}x^u \subset \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ である. 従って Δ の不変量 $s(\Delta; \overline{m}) := \varepsilon(W_{\Delta,\bullet}; \overline{m})$ を重み $\overline{m}$ に対して定義することができる.

一方, n 次元代数多様体 X 上の双有理な次数付き線形系 $W_\bullet$, X のある滑らかな点での局所座標系 $z = (z_1, \dots, z_n)$, 及び $\mathbb{N}^n$ 上の単項式順序 $>$ を決めると, Okounkov 体 $\Delta_{z,>}(W_\bullet)$ と呼ばれる $\mathbb{R}^n$ 内の n 次元閉凸集合が定義できる. これは Lazarsfeld-Mustaţă [LM] と Kaveh-Khovanskii [KK] により独立に導入された. Okounkov 体はトーリック多様体におけるモーメント多面体のある種の一般化であり, $W_\bullet$ の様々な漸近的性質を含んでいる.

第 4 章では Seshadri 定数と Okounkov 体の以下のような関係性を証明した;

定理 4.1 (=Theorem 4.1.1). $W_\bullet$ を n 次元代数多様体 X 上の双有理な次数付き線形系とする. X のある滑らかな点での局所座標系 $z = (z_1, \dots, z_n)$ と $\mathbb{N}^n$ 上の単項式順序 $>$ を固定する.

この時 $\varepsilon(W_\bullet; \overline{m}) \ge s(\Delta_{z,>}(W_\bullet); \overline{m})$ が任意の $r \in \mathbb{N} \setminus 0$ と $\overline{m} \in \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}^r$ について成り立つ.

この定理により Okounkov 体が Seshadri 定数の情報を持っていることがわかる.

参考文献

[Dem] J.P. Demailly, *Singular Hermitian metrics on positive line bundles*, Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990), Lect. Notes Math. 1507, Springer-Verlag, 1992, pp. 87-104.

[KK] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, *Newton convex bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory* arXiv:0904.3350.

[La] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry I*, Ergebnisse der Mathematik undihrer Grenzgebiete, vol. 48. Springer, Berlin (2004).

[LM] R. Lazarsfeld and M. Mustaţă, *Convex bodies associated to linear series*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 42 (2009), no. 5, 783-835.

[Na] M. Nakamaye, *Base loci of linear series are numerically determined*, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 2, 551-566.