論文の内容の要旨

論文題目：Construction of invariant group orderings from topological point of view

（位相幾何の視点からの群の不変順序の構成）

氏名：伊藤哲也

群 G 上の、G 自身の左（右）作用により保たれる全順序 $<_G$ を G の**左（右）不変順序**と呼ぶ。全順序 $<_G$ が左不変かつ右不変であるとき、$<_G$ を両側不変順序と呼び、これらをまとめて以下**不変順序**と呼ぶ。群 G の不変順序 $<_G$ に対し、単位元よりも真に大きい G の元のなす G の部分半群 $P(<_G)$ を $<_G$ の *Positive cone* と呼ぶ。群上の不変順序は、一次元力学系と密接に関連し、近年トポロジー・幾何学などの観点から着目されるようになった対象である。

本論文では、位相幾何の手法および観点から、群 G 上の非自明な不変順序の構成について考察した。論文の前半では、代数的位相幾何学の手法を用いて両側不変順序について考察し、反復積分を用いた幾何的な両側不変順序の構成および三次元多様体の基本群上の両側不変順序の存在とねじれアレキサンダー不変量との関連について調べた。主となる論文の後半では、孤立順序と呼ばれる位相的に特別な左不変順序の構成について研究し孤立順序の新しい例を多数構成することに成功した。

G 上の左不変順序全体のなす集合 $\mathrm{LO}(G)$ 上には自然な位相が定まり、位相空間となることが知られている。Sikora[4] により、位相空間 $\mathrm{LO}(G)$ は完全不連結、コンパクト、距離付け可能であり、Cantor 集合と近い性質を持つことが知られている。Cantor 集合との違いは $\mathrm{LO}(G)$ は孤立点を持ちうることである。

定義 1. 群 G の左不変順序 $<$ が左不変順序全体のなす位相空間 $\mathrm{LO}(G)$ の孤立点であるとき、$<$ を G の孤立順序であると呼ぶ。

孤立順序は群 G の性質を強く反映していることが期待される。孤立順序の性質についてはこれまでに様々な研究がなされている。例えば、Navas[3] は Positive cone が有限生成半群であるような不変順序 $<_G$ は孤立順序であることを示した。しかし、現在のところ具体的に知られている孤立順序の例は非常に少なく、孤立順序の具体例の発見および一般的な構成についてが大きな問題となっている。

本論文では、二つの異なる手法での孤立順序の一般的構成法を与えるともに孤立順序の新しい具体例を多数構成した。

群の左不変順序 $<$ の重要な例として、Dehornoy により発見された Braid 群 B_n 上の Dehornoy 順序が知られている。この順序は非常に豊富な組み合わせ・代数的な構造を持ち、多くの異なる定義が知られている [1]。Dehornoy 順序は孤立順序ではないが、Dehornoy 順序を代数的に変形することにより、Dubrovina-Dubrovin 順序と呼ばれる Braid 群の孤立順序が得られる [2] など、Dehornoy 順序は多くの興味深い性質を持つことが知られている。

本論文では Dehornoy 順序の定義を一般化した Dehornoy-like 順序と呼ばれる順序を導入し、その一般的な性質を調べた。

定義 2 (Dehornoy-like 順序)**.** $<_G$ を有限生成群 G 上の左順序とする。ある G の順序のついた有限生成系 $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$ が存在し、g が下の条件 $\sigma(\mathcal{S})$-positive を満たす事と $1 <_G g$ が同値であるとき、$<_G$ を $\mathcal{S}$ の定める Dehornoy-like 順序であると呼ぶ。

$\sigma(\mathcal{S})$-positive: ある i が存在し、g は正の生成元 s_i を少なくても一つ含むような $s_i, s_{i+1}^{\pm 1}, \dots, s_n^{\pm 1}$. のみを用いた word で表される。

群 G を Braid 群 B_n、生成系 $\mathcal{S}$ を標準生成系 $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ としたとき、$\mathcal{S}$ の定める Dehornoy-like 順序は Dehornoy 順序に他ならない。

生成系 $\mathcal{S}$ が Property F というある性質を満たすとき、Dehornoy-like 順序は多くの点で Dehornoy 順序と同様の興味深い性質を持つこと（Dehornoy 順序で成り立つ多くの結果が拡張されること）を示し、特に、Dehornoy-like 順序を用いて孤立順序の一般的な構成法を与えた。

定理 1. $<_G$ を $(\mathcal{S})$ の定める群 G の *Dehornoy-like* 順序とする。生成系 $\mathcal{S}$ が *Property* F を持つとき、*Dehornoy-like* 順序を変形することで G の孤立順序が得られる。

また、Dehornoy-like 順序の非自明な例を構成した。

定理 2. $m, n > 0$ について $G_{m,n}$ を二つの無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の融合積 $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \langle x, y \mid x^m = y^n \rangle$ とし、生成元 $s_1 = xyx^{-m+1}, s_2 = x^{m-1}y^{-1}$ とする。このとき、生成系 $\mathcal{S} = \{s_1, s_2\}$ は $G_{m,n}$ 上の *Dehornoy-like* 順序を定める。

系として、これらの群が孤立順序を持つことが示される。

Dehornoy-like 順序の定義は組み合わせ・代数的なものであるが、定理 2 は、群 $G_{m,n}$ が融合積であることを利用し、$G_{m,n}$ の Bass-Serre Tree への作用を用いた幾何的な議論により証明される。

また、孤立順序の別の一般的な構成法として、融合積上の孤立順序について考察し次の結果を得た。

定理 3. $<_G$、$<_H$ をそれぞれ群 G、H 上の *positive cone* が有限生成となるような孤立順序とする。z_G を G の非自明な中心の元、z_H を H の非自明な元とする。$<_G, <_H, z_G, z_H$ が次の 3 つの条件を満たすと仮定する。

Inv(H) 順序 $<_H$ は z_H の右からの作用で不変である。つまり、$a <_H b$ であれば $az_H <_H bz_H$ が常に成り立つ。

Cof(H) 任意の $h \in H$ に対しある自然数 N が存在し $z_H^{-N} <_H h <_H z_H^N$ が成り立つ。

Cof(G) 任意の $g \in G$ に対しある自然数 N が存在し $z_G^{-N} <_G h <_G z_G^N$ が成り立つ。

この時融合積 $X = G *_{\langle z_G = z_H \rangle} H$ 上に孤立順序 $<_X$ が存在し、次が成り立つ。

1. $<_X$ の *Positive cone* は有限生成である。

2. $h, h' \in H \subset X$ について $h <_H h'$ であれば、$h <_X h'$ が成り立つ。

3. $g, g' \in G \subset X$ について $g <_G g'$ であれば、$g <_X g'$ が成り立つ。

この定理は既存の孤立順序二つを混合して新しい孤立順序を構成するものであり、定理を用いる事で孤立順序を持つ群を多数構成できる。

例 1. 1. 自然数 $n_1, \ldots, n_m$ に対し、 群 $G = \langle a_1, \ldots a_m \,|\, a_1^{n_1} = a_2^{n_2} = \cdots = a_m^{n_m} \rangle$ は孤立順序を持つ。

2. 自然数 m, n, p, q に対して、群 $G = \langle x, y, z \,|\, (yz^{n-1})^m = z_n, x(yz^n)^{q-1})^p = (yz^n)^q \rangle$ は x, y, z で生成される部分半群を positive cone とするような孤立順序を持つ。

これまでに知られている孤立順序を持つ群はすべて非自明な中心を持っていた。上の例 (2) で現れる群は、中心が自明となるような孤立順序を持つ群の最初の例を与えている。また、定理 3 で得られる孤立順序の多くが Dehornoy-like 順序の変形として得られないことを示し、孤立順序と Dehornoy-like 順序が完全に対応するわけではない事を示した。

参考文献

[1] P.Dehornoy, I.Dynnikov, D.Rolfsen and B.Wiest, *Ordering Braids,* Mathematical Surveys and Monographs **148**, Amer. Math. Soc. 2008.

[2] T. Dubrovina and T. Dubrovin, *On braid groups,* Sb. Math, **192** (2001), 693–703.

[3] A. Navas, *On the dynamics of (left) orderable groups,* Ann. Inst. Fourier, **60** (2010), 1685–1740.

[4] A. Sikora, *Topology on the spaces of orderings of groups,* Bull. London Math. Soc. **36**, (2004), 519-526.