# 論文審査の結果の要旨

氏名　大久保　俊

$p$ を素数とする．$K$ を混標数 $(0,p)$ の完備離散付値体とし，その剰余体を $k_K$ と書く．$K$ の絶対 Galois 群 $G_K$ の表現を調べることは数論幾何学における局所理論の重要な課題である．$l$ を $p$ と異なる素数とするとき，$G_K$ の $l$ 進表現は $K$ についての適当な仮定のもとで，適当に $K$ を有限次拡大すれば冪単表現と呼ばれるものになることが知られている (Grothendieck)．これは $l$ 進モノドロミー定理と呼ばれ，半安定還元定理の $l$ 進表現論における類似である．

大久保氏の博士論文では $G_K$ の $p$ 進表現を扱う．$p$ 進表現は $l$ 進表現に比べて複雑であり，特に上の形の定理はそのままでは成り立たない．Fontaine は $p$ 進表現論の様々なクラス (クリスタリン表現，半安定表現，de Rham 表現) を $p$ 進周期環を用いて定義した．良還元をもつ (半安定還元を持つ，一般の還元の) 代数多様体の $p$ 進エタールコホモロジーはクリスタリン表現 (半安定表現，de Rham 表現) である．そして，Fontaine は $l$ 進モノドロミー定理の類似として，$G_K$ の de Rham 表現は必ず潜在的半安定表現になることを予想した．これを $p$ 進モノドロミー予想という．

$p$ 進モノドロミー予想は $K$ の剰余体 $k_K$ が完全体のときは Berger により $p$ 進微分方程式に関する Crew の予想に帰着され，この Crew の予想は André, Kedlaya, Mebkhout により独立に証明された．また $[k_K : k_K^p]$ が有限のときは森田知真氏により，Andreatta–Brinon の $p$ 進微分方程式の理論と Berger の結果を用いることにより証明された．本博士論文の主定理において，大久保氏は $p$ 進モノドロミー予想を剰余体 $k_K$ に関する一切の仮定を置かずに証明することに成功した．また，この主定理の応用として以下の３つの結果を示した：一つは水平 de Rham 表現は適当な $K$ の標準部分体 $K_{\mathrm{can}}$ の有限次拡大からくる $K$ の有限次拡大をした後に水平半安定表現になるという $p$ 進モノドロミー予想の水平版である．二つ目は $G_K$ の水平 de Rham 表現の圏は $K_{\mathrm{can}}$ の Galois 群 $G_{K_{\mathrm{can}}}$ の de Rham 表現の圏と圏同値となるという定理である．３つ目は $G_K$ の水平 de Rham 表現の１次 Galois コホモロジーを対応する $G_{K_{\mathrm{can}}}$ の de Rham 表現の１次 Galois コホモロジーと微分加群を用いて計算する結果であり，これは兵頭治氏による Galois コホモロジーの計算のある種の一般化である．どれも $p$ 進表現論において重要な興味深い結果である．

本論文における主定理の証明手法も興味深いものである：$k_K$ が完全体の場合，Berger の証明の後に Colmez は $p$ 進微分方程式論を使わない別証明を行ったが，大久保氏の証明はこの Colmez の証明を $k_K$ が完全とは限らない場合に拡張するものである．以下，$\mathbb{C}_p$ を $K$ の代数閉包の $p$ 進完備化，$B^+_{\mathrm{cris}} \subseteq B^+_{\mathrm{st}} \subseteq B^+_{\mathrm{dR}}$

を Fontaine の $p$ 進周期環の $+$ 部分とし，また $B_{\mathrm{cris}}^{\nabla+} \subseteq B_{\mathrm{st}}^{\nabla+} \subseteq B_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ をその水平部分とする．また $\widetilde{B}_{\mathrm{rig}}^{\nabla+} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n(B_{\mathrm{cris}}^{\nabla+})$ とおく (但し $\varphi$ は Frobenius 作用素)．Colmez は Hodge-Tate 重みが 0 以下の de Rham 表現 $V$ に対して Frobenius 作用素 $\varphi$ および $G_K$ の作用を持つ $\widetilde{B}_{\mathrm{rig}}^{\nabla+}$ 加群 $\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^{\nabla+}(V)$ で $\varphi$ の作用に関して Dieudonné-Manin 型分解を持つものを構成した．Sen の定理の一般化 ($k_K$ が一般の時はこれも大久保氏の結果である) を用いることにより，$K$ を有限次拡大でおきかえれば $\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^{\nabla+}(V)$ への $G_K$ 作用が冪単になるように出来る．この作用を表わすコサイクル $c$ が $K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}}^{+}$ 係数 ($K_0$ は $k_K$ の Cohen 環の商体) でコバウンダリになることを示せばよい．大久保氏はこのことを以下の手法により証明した．まず $K \subseteq K^{\mathrm{pf}} \subseteq \mathbb{C}_p$ を満たす剰余体が完全な完備離散付値体 $K^{\mathrm{pf}}$ をとる．そして Galois コホモロジーの完全列および $(B_{\mathrm{cris}}^{+})^{G_{K^{\mathrm{pf}}}}$ に対する Poincaré の補題を用いて $c$ を $K \otimes_{K_0} (B_{\mathrm{cris}}^{+})^{G_{K^{\mathrm{pf}}}}$ 係数のコバウンダリと $B_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ 係数のコバウンダリの和として表わす．前者への $G_{K^{\mathrm{pf}}}$ 作用が自明であることと Colmez による $K^{\mathrm{pf}}$ に対する結果を用いることにより後者はある $B_{\mathrm{st}}^{\nabla+}$ 係数コバウンダリとの差が $(B_{\mathrm{dR}}^{\nabla+})^{G_{K^{\mathrm{pf}}}}$ 係数コバウンダリとなることがわかる．$K \otimes_{K_0} (B_{\mathrm{cris}}^{+})^{G_{K^{\mathrm{pf}}}}, (B_{\mathrm{dR}}^{\nabla+})^{G_{K^{\mathrm{pf}}}} \subseteq K \otimes_{K_0} B_{\mathrm{st}}^{+}$ なので以上により主定理が証明される．

以上に説明した大久保氏の証明は非常に独創性の高くかつ極めて巧妙なものである．主定理は $p$ 進表現論における重要な結果であることは間違いない．また証明中に現れた $\widetilde{N}_{\mathrm{rig}}^{\nabla+}(V)$ は剰余体が非完全な混標数 $(0,p)$ の完備離散付値体のガロア群の $p$ 進表現の更なる解明において役立つものであると期待され，この点においても本博士論文における研究は重要なものである．よって，論文提出者　大久保 俊　は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．