論文の内容の要旨

博士論文題目

Determining nodes for semilinear parabolic evolution equations in Banach spaces

(バナッハ空間上の半線型放物型発展方程式に対する確定節点)

氏名　柿澤 亮平

$\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2)$ の有界領域 Ω 上の半線型熱伝導方程式, Navier-Stokes 方程式などに対する初期境界値問題について, Determining nodes と呼ばれる有限個の点からなる集合の存在を考察した. Determining nodes は時間大域的な解の漸近挙動の観測点からなる集合のことであり, もし存在すれば, Determining nodes E_N での解の漸近挙動というデータから領域 Ω での解の漸近挙動を一意に決定することができる. ただし, $E_N := \{x_1, \cdots, x_N\ ;\ x_i \in \overline{\Omega},\ i = 1, \cdots, N\}$. 本論文では, 導入部 (第 1 節) を経て次の三つのテーマ

第 I 部: Determining nodes の L_2 理論 (第 2 節, 第 3 節)

第 II 部: Determining nodes の L_p 理論 (第 4 節, 第 5 節)

第 III 部: 多重連結有界領域上の Stokes 方程式に対するレゾルベント問題 (第 6 節, 第 7 節, 第 8 節)

について論じ, それらの結果を半線型熱伝導方程式と Navier-Stokes 方程式に応用 (第 9 節) した.

第 I 部では, $n = 2$ または 3 とし, 次の Ω 上の半線型放物型方程式に対する初期境界値問題 (1.1) とその定常問題 (1.2) について, エネルギー法を用いて Determining nodes の存在を考察した. ただし, H は $L_2(\Omega)$ の閉部分空間, $V = H_0^1(\Omega) \cap H$ である.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u) + f & \text{in } L_2((0,\infty); H), \\ u(0) = u_0 & \text{in } V, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$A\bar{u} = F(\bar{u}) + \bar{f} \text{ in } H. \tag{1.2}$$

第 I 部の研究内容は, 半線型熱伝導方程式と Navier-Stokes 方程式を含む (1.1) の強解 u, v について, 次の定理 2.2, 定理 2.3 を証明することによって Hilbert 空間上の半線型放物型方程式に対する Determining nodes の L_2 理論を構築したことである.

定理 2.2. $n=2$ または 3, $R>0$, $f\in L_\infty((0,\infty);H)$, $t_0>0$ とし, (H.2)–(H.4) が成り立つことと, $f_\infty \in H$ が存在し,

$$f(t)\to f_\infty \ in\ H\ as\ t\to\infty$$

となることを仮定する．このとき, Ω, A, F, $M(f,t_0)$ と $M(f_\infty)$ のみに依存する正定数 δ_2 が存在し, $0<d_N\le\delta_2$ かつ, $u\in\mathcal{S}(V(R),f)$ とするとき, 任意の $i=1,\cdots,N$ に対して $\xi_i\in\mathbb{R}$ が存在し, u が

$$u(x_i,t)\to\xi_i\ as\ t\to\infty$$

となれば, (1.2) は任意の $0<\gamma<1/2$ に対して

$$u(t)\to u_\infty\ in\ V\cap C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})\ as\ t\to\infty$$

かつ, 任意の $i=1,\cdots,N$ に対して $u_\infty(x_i)=\xi_i$ が成り立つような強解 $u_\infty\in\mathcal{S}(f_\infty)$ を一意に持つ.

定理 2.3. $n=2$ または 3, $R>0$, $f,g\in L_\infty((0,\infty);H)$, $t_0>0$ とし, (H.3), (H.4) が成り立つことと,

$$f(t)-g(t)\to 0\ in\ H\ as\ t\to\infty$$

となることを仮定する．このとき, Ω, A, F, $M(f,t_0)$ と $M(g,t_0)$ のみに依存する正定数 δ_3 が存在し, $0<d_N\le\delta_3$ かつ, $u\in\mathcal{S}(V(R),f)$, $v\in\mathcal{S}(V(R),g)$ とするとき, 任意の $i=1,\cdots,N$ に対して u,v が

$$u(x_i,t)-v(x_i,t)\to 0\ as\ t\to\infty$$

となれば, 任意の $0<\gamma<1/2$ に対して

$$u(t)-v(t)\to 0\ in\ V\cap C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})\ as\ t\to\infty$$

となる.

初めて Determining nodes の存在を考察したのは Foias-Temam [6] である．彼らは Navier-Stokes 方程式に対する初期境界値問題の強解 u,v について, L_2 の node 補間不等式とエネルギー法を用いて定理 2.2, 定理 2.3 と同様の定理を証明した．反応拡散方程式系に対する初期境界値問題については, Lu-Shao [18] によって Foias-Temam と同様の結果が得られている．ところが, Foias-Temam と Lu-Shao だけでなく, $n=1$ における Foias-Kukavica [5], Kukavica [15], Oliver-Titi [19] の結果を見ても, 個々の方程式に対する Determining nodes の存在を扱っており, 理論の統一性に欠けることがこれまでの問題点であった．定理 2.2, 定理 2.3 を証明するために, まず, Hilbert 空間の直交分解 $L_2(\Omega)=H\oplus H^\perp$ と $L_2(\Omega)$ から H への直交射影 P を用いて (1.1) を定式化する．そして, L_2 の node 補間不等式とエネルギー法を用いて上の性質を持つ Determining nodes の存在を証明することが第 I 部の研究方法である.

第 II 部では, 次の X_p 上の半線型放物型発展方程式に対する初期値問題 (I) について, 解析半群の L_p 理論を用いて Determining nodes の存在を考察した．ただし, X_p は $L_p(\Omega)$ $(1<p<\infty)$ の閉部分空間である.

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+A_pu=F(u)+f \quad \text{in } (0,\infty),\\ u(0)=u_0.\end{cases} \tag{I}$$

第 II 部の研究内容は, 半線型熱伝導方程式と Navier-Stokes 方程式を含む (I) のマイルド解 u,v について, 次の定理 4.1, 定理 4.2 を証明することによって Banach 空間上の半線型放物型発展方程式に対する Determining nodes の L_p 理論を構築したことである．ただし, $X_p^\alpha=D(A_p^\alpha)$ $(\alpha\ge 0)$ である.

定理 4.1. $n/2 < p < \infty$, $0 \leq \alpha_0 < 1$, $R > 0$, $f, g \in C((0,\infty); X_p)$, $t_0 > 0$ とし, (H.5), (H.6) が成り立つことと,

$$f(t) - g(t) \to 0 \ in \ X_p \ as \ t \to \infty$$

となることを仮定する．このとき, n, Ω, p, A_p, F, α_0, $M(f, t_0)$ と $M(g, t_0)$ のみに依存する正定数 δ_1 が存在し, $0 < d_N \leq \delta_1$ かつ, $u \in \mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), f)$, $v \in \mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), g)$ とするとき, 任意の $i = 1, \cdots, N$ に対して u, v が

$$u(x_i, t) - v(x_i, t) \to 0 \ as \ t \to \infty$$

となれば,

(i) 任意の $\alpha_0 < \alpha < 1$ に対して

$$\|u(t) - v(t)\|_{X_p^\alpha} = O(t^{\alpha_0 - \alpha}) \ as \ t \to \infty$$

である．

(ii) $n/(2p) < \alpha < 1$ ならば, 任意の $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $0 < \gamma < 1$, $k + \gamma \leq 2\alpha - n/p$ に対して

$$\|u(t) - v(t)\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = O(t^{\alpha_0 - \alpha}) \ as \ t \to \infty$$

である．

定理 4.2. $n/2 < p < \infty$, $0 \leq \alpha_0 < 1$, $R > 0$, $f, g \in C((0,\infty); X_p)$, $t_0 > 0$ とし, (H.5), (H.6) が成り立つことと, ある $0 < \lambda_1 < \Lambda_1$ に対して

$$\|f(t) - g(t)\|_{L_p(\Omega)} = O(e^{-\lambda_1 t}) \ as \ t \to \infty$$

であることを仮定する．このとき, n, Ω, p, A_p, F, α_0, $M(f, t_0)$ と $M(g, t_0)$ のみに依存する正定数 δ_2 が存在し, $0 < d_N \leq \delta_2$ かつ, $u \in \mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), f)$, $v \in \mathcal{S}(X_p^{\alpha_0}(R), g)$ とするとき, 任意の $i = 1, \cdots, N$ に対して u, v が

$$u(x_i, t) - v(x_i, t) = O(e^{-\lambda_1 t}) \ as \ t \to \infty$$

ならば,

(i) 任意の $\alpha_0 \leq \alpha < 1$ に対して

$$\|u(t) - v(t)\|_{X_p^\alpha} = O(t^{\alpha_0 - \alpha} e^{-\lambda_1 t}) \ as \ t \to \infty$$

である．

(ii) $n/(2p) < \alpha < 1$ ならば, 任意の $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $0 < \gamma < 1$, $k + \gamma \leq 2\alpha - n/p$ に対して

$$\|u(t) - v(t)\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = O(t^{\alpha_0 - \alpha} e^{-\lambda_1 t}) \ as \ t \to \infty$$

である．

これまで Kakizawa [14] の結果より, 基礎的な Determining nodes の L_2 理論は完成したように思われたが, 数値解析や工学・産業への応用の観点から, いくつかの問題点が浮き彫りになった．

- (境界条件の多様性) Dirichlet 境界条件や周期境界条件を除き, 例えば, Navier-Stokes 方程式に重要な役割を果たす Navier 境界条件などの物理学的に重要な境界条件が考察されていない．

- (漸近挙動の収束率) たとえ Determining nodes が存在したとしても, 時間大域的な解同士の漸近挙動がどのような収束率で一致するかどうかは不明である.

定理 4.1, 定理 4.2 を証明するために, まず, X_p^α の補間不等式を用いて L_p の node 補間不等式 (補題 4.6) を証明する. これより, $n/2 < p < \infty$ とし, 補題 4.6 と Giga-Miyakawa [9] と類似の方法を用いて $t^{\alpha-\alpha_0}\|u(t)-v(t)\|_{X_p^\alpha}$ が t に関して一様有界となるような Determining nodes の存在を証明することが第 II 部の研究方法である. 境界条件の多様性については, 適当な境界条件を伴った線型化作用素が X_p でセクトリアルかどうかを確認すれば十分となった. 漸近挙動の収束率についても, $t^{\alpha-\alpha_0}\|u(t)-v(t)\|_{X_p^\alpha}$ の t に関する一様有界性を用いて明らかにできた. このように, 本研究は解析半群の L_p 理論を用いて初めて Determining nodes の L_p 理論を構築したものであり, 本論文の中で最も重要かつ主要な結果である.

第 III 部では, Ω を外側の境界 Γ_0 と内側の境界 Γ_1 で囲まれた $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2)$ の有界領域とし, 次の Ω 上の Stokes 方程式に対するレゾルベント問題 (1.4) について, L_p 評価を満たす解の存在と一意性を考察した.

$$\begin{cases} \mathrm{div} u = f & \text{in } \Omega, \\ \lambda u - T(u,p) = g & \text{in } \Omega, \\ u_\nu|_{\partial\Omega} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ K(T(u,p)\nu)_\tau + (1-K)u_\tau|_{\Gamma_0} = h^0 & \text{on } \Gamma_0, \\ u_\tau|_{\Gamma_1} = h^1 & \text{on } \Gamma_1. \end{cases} \tag{1.4}$$

第 III 部の研究内容は, 次の定理 6.1, 定理 6.2 を証明することによって,

$$A_p u = -P_p \mathrm{div} T(u,p),$$

$$D(A_p) = \{u \in (W_p^2(\Omega))^n \cap L_{p,\sigma}(\Omega)\ ;\ K(T(u,p)\nu)_\tau + (1-K)u_\tau|_{\Gamma_0} = 0,\ u_\tau|_{\Gamma_1} = 0\}$$

によって定義される Stokes 作用素 A_p を任意の次元に対して Determining nodes の L_p 理論に応用したことである.

定理 6.1. $0 < K \leq 1$, $1 < p < \infty$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $f \in \dot{W}_p^1(\Omega)$, $g \in (L_p(\Omega))^n$, $h^0 \in (W_p^{1-1/p}(\Gamma_0))^n$, $h_\nu^0|_{\Gamma_0} = 0$, $h^1 \in (W_p^{2-1/p}(\Gamma_1))^n$, $h_\nu^1|_{\Gamma_1} = 0$ とする. このとき, (1.4) は任意の $\lambda \in S_\varepsilon \cup \{0\}$ に対して

$$I_{p,\lambda,\Omega}^2(u) + \|p\|_{W_p^1(\Omega)} \leq C_{p,\varepsilon}(I_{p,\lambda,\Omega}^{1,-1}(f) + \|g\|_{(L_p(\Omega))^n} + I_{p,\lambda,\Omega}^1(h^0) + I_{p,\lambda,\Omega}^2(h^1))$$

が成り立つような解 $(u,p) \in (W_p^2(\Omega))^n \times \dot{W}_p^1(\Omega)$ を一意に持つ. ただし, $C_{p,\varepsilon}$ は n, Ω, p, ε, μ と K のみに依存する正定数である.

定理 6.2. $0 < K \leq 1$, $1 < p < \infty$, $0 < \varepsilon < \pi/2$ とする. このとき, $\rho(-A_p) \supset S_\varepsilon \cup \{0\}$ であり, 任意の $\lambda \in S_\varepsilon \cup \{0\}$ に対して

$$\|(\lambda I_p + A_p)^{-1}\|_{\mathcal{B}(L_{p,\sigma}(\Omega))} \leq \frac{C_{p,\varepsilon}}{|\lambda|+1} \tag{0.1}$$

が成り立つ. ただし, $C_{p,\varepsilon}$ は n, Ω, p, ε, μ と K のみに依存する正定数である. したがって, A_p は $L_{p,\sigma}(\Omega)$ でセクトリアルであり, 任意の $0 < \lambda_1 < \Lambda_1$ に対して n, Ω, p, ε, μ, K と λ_1 のみに依存する正定数 $C_{p,\varepsilon,\lambda_1}$ が存在し, 任意の $t \geq 0$ に対して

$$\|e^{-tA_p}\|_{\mathcal{B}(L_{p,\sigma}(\Omega))} \leq C_{p,\varepsilon,\lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

が成り立つ. ただし, $\Lambda_1 := \min\{\lambda_1 > 0\ ;\ \lambda_1 \in \mathrm{Re}\sigma(A_p)\}$.

非有界領域 (全空間 $\mathbb{R}^n$, 半空間 $\mathbb{R}^n_+$, 曲がった半空間 H^n_ω) 上の Stokes 方程式に対するレゾルベント問題について, Dirichlet 境界条件においては Farwig-Sohr [7] によって, Navier 境界条件においては Shibata-Shimada [24] によって L_p 評価を満たす解の存在と一意性が得られている. これより, (1.4) については, Solonnikov-Ščadilov [25] と類似の方法を用いて (1.4) の広義解の存在と一意性を証明すれば十分と思われた. ところが, 次の発散問題 (6.3) について, 彼らは $p = 2$ とし, $n = 3$ における Helmholtz の定理を用いて次の補題 6.1 を証明しており, 次元の任意性を失うことがこれまでの問題点であった.

$$\begin{cases} \mathrm{div} u = f & \text{in } \Omega, \\ u_\nu|_{\partial\Omega} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u_\tau|_{\Gamma_1} = h & \text{on } \Gamma_1. \end{cases} \tag{6.3}$$

補題 6.1. $1 < p < \infty$, $f \in \dot{L}_p(\Omega)$, $h \in (W_p^{1-1/p}(\Gamma_1))^n$, $h_\nu|_{\Gamma_1} = 0$ とする. このとき, (6.3) は

$$\|u\|_{(W_p^1(\Omega))^n} \leq C_p(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|h\|_{(W_p^{1-1/p}(\Gamma_1))^n}),$$

を満たす解 $u \in (W_p^1(\Omega))^n$ を持つ. ただし, C_p は n, Ω と p のみに依存する正定数である.

定理 6.1, 定理 6.2 を証明するために, まず, Bogovskiĭ [2] の結果を用いて Solonnikov-Ščadilov の方法を改良し, 任意の次元に対して (1.4) の広義解の存在と一意性を証明する. そして, 局所化法を用いて (1.4) を $\mathbb{R}^n$ と H^n_ω 上の Stokes 方程式に対するレゾルベント問題に帰着させ, Farwig-Sohr と Shibata-Shimada の結果を用いて L_p 評価を満たす (1.4) の解の存在と一意性を得ることが第 III 部の研究方法である. Determining nodes の L_p 理論への応用に関しては, 定理 6.2 より第 II 部の研究結果が境界条件の多様性に耐えうる理論であると裏づけることができた.

第 9 節では, Determining nodes の理論を半線型熱伝導方程式と Navier-Stokes 方程式に応用した. 他にも Determining nodes の理論と関連した研究課題として, 次の Ω 上の Navier-Stokes 方程式に対する初期境界値問題 (1.3) について, 定常解の漸近的性質を考察した.

$$\begin{cases} \mathrm{div} u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \rho\{\partial_t + (u \cdot \nabla)\}u - \mathrm{div} T(u,p) = \rho g & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u_\nu|_{\partial\Omega} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ K(T(u,p)\nu)_\tau + (1-K)u_\tau|_{\Gamma_0} = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times (0,T), \\ u_\tau|_{\Gamma_1} = h & \text{on } \Gamma_1 \times (0,T). \end{cases} \tag{1.3}$$

第 9 節の研究内容は, 任意の $n < p < \infty$ に対して (1.3) の小さな定常解 $(\bar{u}, \bar{p}) \in (W_p^2(\Omega))^n \times \dot{W}_p^1(\Omega)$ が一意に存在すること (定理 9.5) と, $(\bar{u}, \bar{p})$ が $L_{p,\sigma}(\Omega)$ で漸近安定, つまり $u_0 - \bar{u}$ を $L_{p,\sigma}(\Omega)$ で十分小さくするとき, 任意の $0 \leq \alpha < 1$ に対して

$$\|u(t) - \bar{u}\|_{X_p^\alpha} \leq C_{p,\alpha,\lambda_1} t^{-\alpha} e^{-\lambda_1 t} \|u_0 - \bar{u}\|_{(L_p(\Omega))^n}$$

が成り立つこと (定理 9.6) を証明したことである. (1.3) と類似の問題の定常解の存在, 一意性と漸近安定性については, Itoh-Tanaka-Tani [13] によって L_2-Sobolev-Slobodetskiĭ空間という複雑な関数空間を用いた結果が得られている. 定理 9.5, 定理 9.6 を証明するために, まず, 定理 6.1 と Banach の不動点定理を用いて定理 9.5 を証明する. そして, 定理 6.2 と Giga-Miyakawa と類似の方法を用いて定理 9.6 を証明することが第 9 節の研究方法である. これより, L_p-Sobolev 空間という簡単な関数空間を用いて (1.3) の定常解の存在, 一意性と漸近安定性を得ることができた.