

論文審査の結果の要旨

氏名： 神本 晋吾

本論文提出者は, large parameter η を含む 1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 Q(x)\right)\psi(x, \eta) = 0$$

の完全 WKB 解析を研究し, WKB 解

$$\psi(x, \eta) = \exp\left(\eta \int^x \sqrt{Q(x)} dx\right) \sum_n \psi_n(x) \eta^{-(n+1/2)}$$

とその Borel 変換 $\psi_B(x, y) = \sum_n \frac{\psi_n(x)}{\Gamma(n+1/2)} (y + y_0(x))^{n-1/2}$ (ただし $y_0(x) = \int^x \sqrt{Q(x)} dx$), および $Q(x)$ を特定の標準形に変換する方程式の変換級数論に関して 3 つの大きな成果をあげた.

第 1 の結果は $Q(x)$ が 1 つの 1 位のゼロ点を持つ場合で, $Q(x) = x$ への変換論が展開された. 通常の議論は (x, y) -空間において x -変数については単純変わり点 (Q の 1 位のゼロ点) の近傍, y -変数については基準点である $-y_0(x)$ の近傍という, 局所的な考察に限られていたが神本はこの議論を大域的なものに拡張することに成功した. これは彼が多変数函数論の Hartogs 現象からの着想で得た「Stokes 曲線上での変換級数の Borel 総和可能性を, そこでの一様 Borel 変換可能性とそこ以外での Borel 総和可能性から導く」という画期的なアイデアによるものである. 通常, WKB 解の Borel 総和可能性を問題にする際は, 当然のことながらその特異集合である Stokes 曲線を除外する. WKB 解の Borel 総和可能性については以前からいくつかの結果が知られていたが, ここではそれを特異集合である Stokes 曲線上にまで拡張するものである. 例えば, x が Stokes 曲線上の点であるとき, y -平面においては, 基準点である $-y_0(x)$ から見て実軸に平行に延びる直線上に動く特異点 $y = y_0(x)$ が存在するが, この $y = y_0(x)$ を越えた先にはもはや特異点は存在しないことは, この結果によって初めて確かめられた. この結果は, 完全 WKB 解析で最も基本的な Stokes 曲線上での WKB 解の接続公式に完全な数学的意味付けを与えており, その意味で非常に基本的かつ画期的な成果だと言うことができる. この結果は神戸大学の小池達也准教授との共著であるが上記の画期的なアイデアなど神本による貢献は大きい.

第 2, 第 3 の結果は, それぞれ $Q(x)$ が, 1 位のゼロ点と 1 位の極を 1 つずつ持つ場合, 1 つの 1 位のゼロ点と 2 つの 1 位の極を持つ場合, に関するもので, いずれも零点と極がパラメーターの変化によって 1 点に合流する場合の状況を解析した. これらは WKB 解の Borel 変換のいわゆる「動かない特異点」を解析することを目的とし, 第 2 では青木・河合・竹井の先行結果

[AKT2] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 54, Math. Soc. Japan, 2009, pp.19-94

を1個の単純変わり点と1個の単純極が合流する場合に拡張した。他方、単純極が2個合流する場合は特に大きな困難が生じるため、2個の合流する単純極とそれに付随して現れる「動かない特異点」を議論しようとするれば、必然的に他にもう1個の単純変わり点を扱わざるを得なくなる。そこで第3部では、2個の単純極と1個の単純変わり点が同時に合流する場合を論じた。3個の点のまわりでの標準形を論じた論文は、完全 WKB 解析の枠組のみならず古典的な漸近解析の分野を含めてもこれが初めてであり、極めて先駆的で重要な結果である。これら3つの結果はいずれも共著であるが、そのいずれにおいても変換級数の評価といった実質的な解析の部分をもっぱら担当したのは神本であり、寄与は決して小さくない。また第3部では単純変わり点の合流速度を支配するパラメータの微妙な調整を最後までやり通したのは神本の計算力によるところが大きく、彼の貢献なしには第3の結果は得られなかったことが共同研究者であり研究指導委託教員である京都大学の竹井義次准教授からのコメントも頂いている。

以上の結果において先駆者や共同研究者による寄与の分を除いてもこの分野において重要な新しい結果を得ただけでなく新しい研究の境地を開き、今後のこの分野の発展に大きく貢献している。

よって、論文提出者 神本 晋吾 は、博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。