論文の内容の要旨

論文題目: Spherical functions associated to the principal series representations of $SL(3,\mathbf{R})$ and higher rank Epstein zeta functions
($SL(3,\mathbf{R})$ の主系列表現に付随する球関数, 及び高階 Epstein ゼータ関数について)

氏名: 宗野惠樹

次の 4 本の論文を合わせたものを以て博士論文とする:
I. Shintani functions on $SL(3,\mathbf{R})$ ($SL(3,\mathbf{R})$ の新谷関数)
II. The matrix coefficients with minimal K-types of the spherical and non-spherical principal series representations of $SL(3,\mathbf{R})$ ($SL(3,\mathbf{R})$ の主系列表現の行列係数)
III. A second limit formula for higher rank twisted Epstein zeta functions and some applications (高階 Epstein ゼータ関数の第 2 極限公式とその応用)
IV. Fourth moment of the Epstein zeta functions (Epstein ゼータ関数の 4 乗平均).
大まかに分けると, I と II は $SL(3,\mathbf{R})$ の主系列表現に付随する球関数についての考察であり, III と IV は一般のランクの正定値行列に付随する Epstein ゼータ関数についての考察である. それぞれの論文の概要について順に説明しよう.

まず, 論文 I では $SL(3,\mathbf{R})$ の主系列表現に付随する新谷関数について研究した. 新谷関数は 1970 年代に新谷卓郎氏により p 進体上の GL_n の " Whittaker 関数 " として導入された. 彼は群作用に関するある不変性を持つような $GL(n,k)$(k は $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体) 上の関数を定義し, その存在と一意性を示した. この結果は後に村瀬篤・菅野孝史の両氏によって非アルキメデスな体上のより一般的なケースに拡張され, 新谷関数による L-関数の積分公式や重複度 1 定理が得られた. 一方で, アルキメデス的な体からなる群上の新谷関数の研究は比較的最近になされ, 例えば $GL(2,\mathbf{R})$, $GL(2,\mathbf{C})$ (平野幹), $SU(1,1)$, $U(n,1)$ (都築正男), $Sp(2,\mathbf{R})$(森山知則) などの群上の新谷関数がこれまでのところ研究されている. 私は $G=SL(3,\mathbf{R})$ 上の新谷関数のうち, 特に主系列表現の像として特徴付けられるものについて研究した. この場合の新谷関

数は,

$$K = SO(3),$$

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{cc} H_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{array} \right) \in G \middle| (H_1, h_2) \in GL(2,\mathbf{R}) \times GL(1,\mathbf{R}) \right\},$$

(τ, V_τ) を K の有限次元表現, (η, V_η) を H のユニタリ表現とするとき, 滑らかなベクトル値関数 $F : G \to V_\eta \otimes V_\tau$ であって, $F(hgk) = (\eta(h) \otimes \tau(k^{-1}))F(g)$ $((h,g,k) \in H \times G \times K)$ を満たすものである. 論文 I では η は H のユニタリ指標に限定し, K の表現としては主系列表現の minimal K-type を取った. 新谷関数を調べる手法は, Whittaker 関数の場合と同様であり, Casimir 方程式と Dirac-Schmid 方程式という 2 つの方程式 (この場合は常微分方程式になる) を構成し, それらを解くことによる. 論文 I では主系列表現が spherical なときと non-spherical なときの両方の場合において, 微分方程式を調べることで新谷関数の明示公式を与え, 関数空間の次元が 1 以下になることを示した.

次に論文 II の概要を説明しよう. この論文では, $SL(3,\mathbf{R})$ の主系列表現 (spherical な場合と non-spherical な場合の両方) の行列係数について研究した. この行列係数は $SL(3,\mathbf{R})$ 上の関数であるが, 先と同じ記号で $G = SL(3,\mathbf{R})$, $K = SO(3)$ とするとき, K の有限次元表現 (τ_L, V_L), (τ_R, V_R) があり, 滑らかな関数 $\phi : G \to V_L \otimes V_R$ であって $\phi(k_L g k_R^{-1}) = (\tau_L(k_L) \otimes \tau_R(k_R))\phi(g)$ $(k_L, k_R \in K,\ g \in G)$ を満たすようなものと同一視できる. 論文 II では, K の表現 τ_R, τ_L が主系列表現 π の minimal K-type になる場合を扱った. すなわち, π が spherical な場合は τ_R, τ_L として K の自明な表現 $\mathbf{1}$ を取り, π が non-spherical な場合は τ_R, τ_L として 3 次元の tautorogical 表現 τ_2 を取った. 球関数を調べるための道具は論文 I と同じであり, Casimir 方程式と Dirac-Schmid 方程式 (gradient 方程式) を構成してそれらを解くことによるが, 今回は 2 変数の偏微分方程式となる. 論文の主結果は spherical 表現, non-spherical 表現の場合でそれぞれ (a) 6 つの特性根に対応する級数解の表示を得, (b) 行列係数をそれら 6 つの級数解の線型結合で表したこと, である. (b) の線型結合に現れる係数は c-関数とよばれる. 半単純 Lie 群の class one 主系列表現の行列係数における c-関数の導出は古典的な結果として知られているが, 論文 II で行ったような non-spherical な場合の c-関数の計算はこれまでに例が無く, 新しい結果であると言える.

次に, 論文 III について説明しよう. この論文では, $n \times n$ 正定値対称行列 Q と $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ に対し, $\mathrm{Re}(s) > \frac{n}{2}$ において

$$\zeta_n(s, \mathbf{u}, Q) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}} e^{2\pi i {}^t\mathbf{m} \cdot \mathbf{u}} ({}^t\mathbf{m} Q \mathbf{m})^{-s}$$

で定義される Epstein ゼータ関数 $\zeta_n(s, \mathbf{u}, Q)$ を扱った. Riemann ゼータ関数と同様, $\zeta_n(s, \mathbf{u}, Q)$ は全複素平面に有理型に解析接続され, $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}^n$ なら $s = \frac{n}{2}$ に 1 位の極を持ち, $\mathbf{u} \notin \mathbf{Z}^n$ ならば全平面で正則になる. 前者の場合に $s = \frac{n}{2}$

での Laurent 展開の定数項を与えるものを Kronecker の (第 1) 極限公式と言い, 後者の場合に $s=\frac{n}{2}$ での値を与えるものを Kronecker の第 2 極限公式と言う. 論文 III では主に後者の場合, 即ち $\mathbf{u}\in\mathbf{R}^n\backslash\mathbf{Z}^n$ の場合を考えた. $n=2$ のときは Kronecker による古典的な結果として知られている. $n=3$ の場合は 1980 年代に Efrat により研究されており, 彼はその結果を利用しある関数空間に作用する Dirac 作用素とラプラシアンの行列式の解釈を与えた. 論文 III は Efrat の結果の一般の $n\geq 2$ への拡張にあたる. 主結果として, $\zeta_n(\frac{n}{2},\mathbf{u},Q)$ の値を, 階数の 1 つ低い $\zeta_{n-1}(\frac{n}{2},\mathbf{u}',Q')$ ($\mathbf{u}'\in\mathbf{R}^{n-1}$, Q' は $(n-1)\times(n-1)$ 正定値対称行列) と, Dedekind の η-関数の一般化にあたる保型性を持つ関数で表した. また, 計算の途中経過に現れる式を利用し, $\zeta_n(s,\mathbf{u},Q)$ の K-Bessel 展開 (Chowla-Selberg の公式の類似) を得た. この公式は, Epstein ゼータ関数の実軸上の零点の存在を調べる場合などに有益であると期待される. 更に Efrat の結果の一般化として, 第 2 極限公式を利用してある保型関数の空間に作用するラプラシアンの行列式の解釈を与えた.

最後に, 論文 IV の概略を説明しよう. 論文 IV では, $n\geq 4$ とし, $n\times n$ 正定値行列 Q に付随する Epstein ゼータ関数 $\zeta(s;Q)$ (論文 III の $\zeta_n(s,\mathbf{u},Q)$ で $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ としたもの) の $\mathrm{Re}(s)=\frac{n-1}{2}$ における 4 乗モーメント, 即ち, 積分

$$I(T;Q):=\int_0^T\left|\zeta\left(\frac{n-1}{2}+it;Q\right)\right|^4dt$$

の T に関するオーダーの上限を調べた. Riemann ゼータ関数に関しては,

$$I_k(T):=\int_0^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k}dt$$

と置くとき, 古典的な結果として $I_1(T)\sim T\log T$ (Hardy-Littlewood, 1918 年), $I_2(T)\sim\frac{1}{2\pi^2}T\log T$ (Ingham, 1926 年) となることが知られている. 一般には $I_k(T)\sim c_kT(\log T)^{k^2}$ ($\exists\, c_k$:定数) となると予想されているが, $k=0,1,2$ の場合を除きまだ証明されていない. このようなモーメントを計算する際の有力な道具として, 近似関数等式がある. 上の $I_1(T)$, $I_2(T)$ はそれぞれ $\zeta(s)$, $\zeta(s)^2$ の近似関数等式を利用して計算されたものである. $k\geq 3$ の場合に同様の結果が出せない最大の理由は, $k\geq 3$ のとき $\zeta(s)^k$ の近似関数等式が積分の評価において十分には役立たないという点にある. Dirichlet L-関数をはじめ多くの L-関数でモーメントの研究がなされているが, 同じ理由により高次のモーメントに関しては予想に見合う結果は得られていない. さて, Epstein ゼータ関数の話に戻ると, $\zeta(s;Q)$ の近似関数等式は存在するが, 関数等式の Γ-因子の関係からこれは $\zeta(s)^2$ の近似関数等式に似た形になる. 従って $\zeta(s;Q)$ の 2 乗モーメントは $I_2(T)$ の計算と同様にして求めることができ, 既に結果が知られている. ところが 4 乗モーメントだと $\zeta(s)^4$ の近似関数等式に似たものを用いることになるが, 上述したとおりこれは上手く機能しない. 従って別の方法を考える必要がある. 論文 IV の基本的なアイデアは次の通りである. ま

ず Epstein ゼータ関数の Dirichlet 係数から作られるテータ関数を考えると, これは重さ $\frac{n}{2}$ のモジュラー形式になり, Eisenstein 級数と cusp form の和に分解する. 従って Epstein ゼータ関数は Eisenstein 級数と cusp form のそれぞれに付随する L-関数の和に分解する. cusp form の Fourier 係数は比較的小さくなることから, cusp form に付随する L-関数の積分は $O(T)$ と評価できる. 一方で Eisenstein 級数に付随する L-関数は, Hecke, Malyshev, Siegel らの結果を利用すると, Dirichlet L-関数を含む有限ないし無限和で書くことができ, Dirichlet L-関数の 4 乗モーメントの結果を利用して積分が $O(T(\log T)^4)$ と評価できることが分かる. 従って Epstein ゼータ関数の $\mathrm{Re}(s) = \frac{n-1}{2}$ 上の 4 乗モーメントは $O(T(\log T)^4)$ と評価できる. Riemann ゼータ関数をはじめ, これまで多くの L-関数でモーメントが研究されてきたが, 上からの評価が $T^{1+\epsilon}$ ($\forall\epsilon > 0$) 程度になるものは (私が知る限り) 全て近似関数等式が有効に働く場合である. 論文 IV はそうでないケースにおいて相応の上限を得たという点において意義があると考えられる.