論文審査の結果の要旨

氏 名　　宗　野 惠 樹

論文題目：Spherical functions associated to the principal series representations of $SL(3,\mathbb{R})$ and higher rank Epstein zeta functions

和訳 （$SL(3,\mathbb{R})$ の主系列表現に付随する球関数, 及び高階 Epstein ゼータ関数について)

表題の博士論文は事実上、以下の 4 つの英文の論文（I、II, III, IV）を合わせて、それに日本語の序文を付けたものである。

I. Shintani functions on $SL(3,\mathbb{R})$ (和訳：$SL(3,\mathbb{R})$ の新谷関数)

II. The matrix coefficients with minimal K-types of the spherical and non-spherical principal series representations of $SL(3,\mathbb{R})$ (和訳：$SL(3,\mathbb{R})$ の主系列表現の行列係数)

III. A second limit formula for higher rank twisted Epstein zeta functions and some applications (和訳：高階 Epstein ゼータ関数の第 2 極限公式とその応用)

IV. Fourth moment of the Epstein zeta functions (和訳：Epstein ゼータ関数の 4 乗平均)

このうち、 I と II は $SL(3,\mathbb{R})$ の主系列表現に付随する球関数についての研究であり, III と IV は一般のランクの正定値行列に付随する Epstein ゼータ関数についての研究である。具体的な内容は個々の論文によって異なるので、後ほどその細部を概観する。その前に、主査の視点から研究の背景を簡単に述べたい。

０． 背景など

$GL(n,\mathbb{Q})$ に属する保型形式論の現状について述べる。50 年代の岩澤-Tate 理論によって、20 世紀前半の E. Hecke の研究をアデールで書き換える仕事がなされた。同じく $GL(2)$ の場合に Hecke の研究をアデール化する試みは 50 年代からいろいろあったが、72 年の Jacquet と Langlands の Springer の Lecture Note で納得のいく形である程度書き換えは完成した。任意の n に対してこれを $GL(n)$ に一般化するのは、Jacques, Piatetsuki − Shapiro、Shalika の 3 人が中心になって 80 年代に標準 L 関数の構成という意味では一応の完成を見た。中には粗忽にもこれで研究が終わったという軽率な人もいるが、実はようやく入り口にたどり着いたところだと心ある人たちは考えている。何故ならば、実は n が 3 以上のとき、尖点形式がどのように得られるか、現状では何も分からないし、局所的な問題に限っても、実素点での研究も、整数論研究に必要な明示的な結果はほとんどない。宗野氏の論文は、I、II に関しては、この後者の実素点での研究を進展させたものであり、III、IV は、伝統的な解析整数論的な手法を、保型形式研究に持ち込もうとしたものである。それゆえ、主題の選択は時宜を得たものと言ってよい。以下、個別の論文の主結果などを見てみよう。

（I）Shintani functions on $SL(3,\mathbb{R})$　の部分について

ここでは、著者は $SL(3,\mathbb{R})$ の主系列表現に付随する新谷関数について研究

した．新谷関数は 1970 年代に故・新谷卓郎の未発表の研究の中で、p 進体上の GL_n の場合に最初に導入された。後に村瀬篤・菅野孝史の両氏によってより一般化された形で述べれば、非アルキメデスな体上の簡約代数群 G の既約表現 π と、その表現空間内で G のある球面的部分群 H に関して不変なベクトルをもつものに対して、H －不変球関数を定義し、その存在と一意性を示した。これは保型的 L-関数の構成や関数等式に応用される。現在まで,アルキメデス的な局所体の場合には、対応する問題の研究は少ない。著者は $G = SL(3,\mathbb{R})$、$H = GL(2,\mathbb{R})$ の対の新谷関数のうち, 特に G の主系列表現の模型で、H の有限次元表現に対応するものに関して、その動径成分を明示的に求めた。

（II）**The matrix coefficients with minimal K-types of the spherical and non-spherical principal series representations of $SL(3,\mathbb{R})$ の部分について**

この部分では, $SL(3,\mathbb{R})$ の特に non-spherical 主系列表現の行列係数の動径成分のみたす「超幾何微分方程式系」を明示的に求め、所謂特異境界値問題あるいは漸近的境界値問題の手法により、特異因子上の一変数超幾何関数のモノドロミー決定の問題に帰着して、元の 2 変数超幾何系のモノドロミーの一部を決定して、その応用としてこの主系列表現の c-functions を決定した。合わせて、著者はクラス 1 の場合も明示的に書き上げ、適切な引用文献がない現状を改善している。

この種の問題は、一部軽率な「専門家」によって「non-spherical の場合も spherical な場合と同様にできる」との誤った言説が流布しているが、当論文の序文に明確に指摘されているように、実は non-spherical な主系列表現で無限小指標だけでは区別できないものがあり、このような断言は誤りである。

ここでは、Casimir 方程式の他に Dirac-Schmid 方程式 (gradient 方程式) を構成してそれらを解くことが技術的な要点である。二変数の偏微分方程式にも関わらず、著者は優れた計算力ではっきりした結果に至っている。

（III）**A second limit formula for higher rank twisted Epstein zeta functions and some applications の部分について**

この論文では, n 次実正定値対称行列 Q と n 次実ベクトル u に対し、$\mathrm{Re}(s) > n/2$ において Epstein − Lerch のゼータ関数 $\zeta_n(s,u,Q)$ を考える。ベクトル u の成分のどれかが整数でないときに、このゼータ関数は複素全平面で正則に延長できる。この場合に $s = n/2$ の値を与えるものを Kronecker の第 2 極限公式と言い、この値のある無限積跡表示が当論文の主結果である。これは $n = 2$ のときは Kronecker による有名な結果で、$n = 3$ の場合は 1980 年代に Efrat が研究し、彼はその結果を利用しある関数空間に作用する Dirac 作用素とラプラシアンの行列式としての解釈を与えた。当論文は Efrat の結果の一般の $n \geq 2$ への拡張にあたる。主結果として、$\zeta_n(n/2,u,Q)$ の値を,階数の 1 つ低い $\zeta_{n-1}(n/2,u',Q')$ ($u' \in \mathbb{R}^{n-1}$, Q' は $(n-1)$ 次正定値対称行列) と, Dedekind の η-関数の一般化にあたる保型性を持つ関数で表した。また、計算の途中経過に現れる式を利用し、$\zeta_n(s,u,Q)$ の K-Bessel 展開 (Chowla-Selberg の公式の類似) を得た。この公式は, Epstein ゼータ関数

の実軸上の零点の存在を調べる場合などに有益であると期待される。 更に Efrat の結果の一般化として, 第 2 極限公式を利用してある保型関数の空間に作用するラプラシアンの行列式の解釈を与えた。

（IV）**Fourth moment of the Epstein zeta functions の部分について**

この論文では、$n \geq 4$ とし、n 次対称正定値行列 Q に付随する Epstein ゼータ関数 $\zeta(s;Q)$ (論文 III の $\zeta_n(s,u,Q)$ で $u=0$ としたもの) の $Re(s)=\frac{n-1}{2}$ における 4 乗モーメント, 即ち, 積分

$$I(T;Q) := \int_0^T |\zeta(\frac{n-1}{2}+it;Q)|^4 dt$$

の T に関する上からの評価式を得た。

Riemann ゼータ関数に関する類似の研究は自明でない零点の存在領域の評価と関連していて、よく知られている研究 (Hardy-Littlewood, 1918 年；Ingham, 1926 年など) がある。この場合は近似関数等式を用いて研究が進んできた。

Epstein ゼータ関数の場合にも、近似関数等式を用いて、その 2 乗モーメントを Riemann ゼータと同様に求める結果がこれまで得られていた。しかしながら、4 乗モーメントの場合、この手法はうまくいかない。

当論文では著者は別の方法を見出した。その基本的なアイデアは次の通りである。

Epstein ゼータ関数の Dirichlet 係数から作られるテータ関数を考えると、これは重さ $n/2$ のモジュラー形式になり、Eisenstein 級数と尖点形式の和に分解する。従って Epstein ゼータ関数は Eisenstein 級数と尖点形式のそれぞれに付随する L-関数の和に分解する。尖点形式の Fourier 係数は比較的小さくなることから、これに付随する L-関数の積分は $O(T)$ と評価できる。他方、Eisenstein 級数に付随する L-関数は、Hecke, Malyshev, Siegel らの結果を利用すると、Dirichlet L-関数を含む有限ないし無限和で書くことができ、Dirichlet L-関数の 4 乗モーメントの結果を利用して積分が $O(T(\log T)^4)$ と評価できることが分かる。従って Epstein ゼータ関数の $Re(s)=\frac{n-1}{2}$ 上の 4 乗モーメントは $O(T(\log T)^4)$ と評価できる。

当論文は、近似関数等式を直接に用いるのでなく、2 次形式のテータ関数の保型形式として性質を用いて 4 乗モーメントを求めたものである。この手法は、さらなる一般化も期待でき大変興味深い。

上に見た 4 編の論文のいずれにおいても、著者はそれぞれの方向で新たな有意義な結果を得ている。論文 I、II は大きな意味で似たような手法と言えるが、III と IV は「Epstein ゼータ関数」の言葉は共通するが、それぞれ別の解析的な手法を用いる。短期間に、多様な手法をこれまでの研究の限界を超えて進展させる著者の力量は注目に値し、今後の働きにも大きな期待をもつことができる。

よって、論文提出者　宗　野　惠　樹　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。