

# 論文の内容の要旨

論文題目 The explicit calculation of Čech cohomology and an extension of Davenport's inequality

(Čech コホモロジーの明示的計算と Davenport 不等式の拡張)

氏名 田然 (Ran TIAN)

## 背景

$\mathbb{C}(t)$  上の楕円曲線  $E$  の方程式を Weierstrass 標準形で  $y^2 = 4x^3 - 3ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{C}[t]$ ) と書いたとする。 $\mathbb{C}(t)$  のプレース  $\nu$  を一つ固定すると、ある定数  $C_{a,b,\nu}$  が存在して、任意の有理点  $(r, s) \in E(\mathbb{C}(t))$  に対し、付値  $\nu(r) \geq C_{a,b,\nu}$  であることは Manin(1966) によって証明された。これは方程式  $y^2 = 4x^3 - 3ax + b$  の多項式解が有限個しかないとする Siegel の定理を簡単に導き出す強力な命題である。

$E$  を  $\mathbb{P}^1$  への elliptic fibration を持つ、 $\mathbb{C}$  上の代数曲面だと思えば、幾何的に  $\nu(r)$  は、 $(r, s)$  の表すセクションと 0-セクションとの  $\nu$  における交点重複度と比例している。この交点重複度が一定以上となる全ての有理点の集合  $E_i := \{(r, s) \in E(\mathbb{C}(t)); \nu(r) \leq -2i\}$  は、 $E(\mathbb{C}(t))$  の部分群で、 $E_i \supset E_{i+1}$  であり、 $E_i/E_{i+1}$  が torsion-free であることは簡単なレンマだが、これと Mordell-Weil の定理と組み合わせて上の Manin の命題 (そして Siegel の定理) がすぐ従うことは Voloch(1994) が気付いた。

しかし Manin の命題における定数  $C_{a,b,\nu}$  の明示的表示と  $\text{rank} E_i$  の評価が問題となる。これらの評価は  $E$  の多項式解の個数の評価につながる。

座標変換で  $\nu$  が  $t = \infty$  での付値と思ってもかまわない。このとき  $\nu = -\text{deg}$  で、ただし有理式に対して  $\text{deg}$  は分子と分母の多項式の次数の差を表す。 $E$  の多項式解  $(r, s)$  に対する  $\text{deg} r$  の評価について以下のような結果が知られている：

定理 (Davenport の不等式) 楕円曲線  $E : y^2 = x^3 + h$  ( $0 \neq h \in \mathbb{C}[t]$ ) の整点  $(r, s)$  について不等式

$$\frac{1}{2} \text{deg} r \leq \text{deg} h - 1$$

が成り立つ。

もっと一般的な楕円曲線に対して次の評価がある：

定理 (Hindry-Silverman) 楕円曲線  $E : y^2 = 4x^3 - 3ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{C}[t], \Delta = a^3 - b^2 \neq 0$ ) の整点  $(r, s)$  は

$$\frac{1}{2} \text{deg} r \leq 2N_0(\Delta) - 2 + \frac{1}{12} \text{deg} \Delta$$

をみたす。ここで  $N_0$  は異なる零点の個数を表す。

## 主定理

本論文の主定理は次のようなものである。

記号 楕円曲線  $E : y^2 = 4x^3 - 3ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{C}[t]$ ) に対して次を定義し：

- $n$  を  $\deg a \leq 4n, \deg b \leq 6n$  をみたす最小の整数とする。
- $\Delta = a^3 - b^2, \Lambda = 2b'a - 3ba', \Phi = \frac{1}{3}(b')^2 - \frac{3}{4}a(a')^2$  とおく。
- $P_2 = \Delta\Lambda, P_1 = \Delta'\Lambda - \Delta\Lambda', P_0 = \frac{1}{12}(\Delta''\Lambda - \Delta'\Lambda' + \Phi\Lambda)$  とおく。
- $p, q \in \mathbb{C}[t]$  に対し、 $\rho(p, q) = \Delta\Lambda q' - \Delta\Lambda'q + \frac{11}{12}\Delta'\Lambda q - 6(P_2p'' + P_1p' + P_0p)$  とおく。
- $B = \{\rho(p, q) \text{ MOD } \Lambda^2\}$  とおく。ここで MOD  $\Lambda^2$  は、多項式を  $\Lambda^2$  で割ったの余りを表す。

次を仮定する：

- $a, b$  が minimal、つまり定数でない多項式  $l$  で  $l^4$  が  $a$  を割り切り、 $l^6$  が  $b$  を割り切るようなものは存在しないとす。
- $\Lambda \neq 0$ 、つまり  $E$  の  $J$ -不変量は定数でないとする。

定理 上の記号下で、

1.  $c = \min\{\deg \beta; \beta \in B, \beta \neq 0\}$  とおくと、有理点  $(r, s) \in E(\mathbb{C}(t))$  に対して

$$\frac{1}{2} \deg r \leq \deg(\Delta\Lambda) - c - 2$$

2.  $E_i = \{(r, s) \in E(\mathbb{C}(t)); \frac{1}{2} \deg r \geq i\}$  とおくと、

- (a)  $c \leq j \leq 2 \deg \Lambda - 1$  をみたす  $j$  に対し

$$\text{rank} E_{\deg(\Delta\Lambda)-j-2} \leq \dim_{\mathbb{C}} \{\beta \in B; \deg \beta \leq j\}.$$

- (b)  $2 \deg \Lambda + n - 2 \leq k$  をみたす  $k$  に対し

$$\text{rank} E_{\deg(\Delta\Lambda)-k-2} \leq \dim_{\mathbb{C}} B + k - (2 \deg \Lambda + n - 2).$$

この定理は Hindry-Silverman の評価よりもいい不等式をもたらす。

特に楕円曲線  $E : y^2 = x^3 + x + h$  の有理点  $(r, s)$  に適用する場合、よりきれいな不等式

$$\frac{1}{2} \deg r \leq N_0(\Delta) - 1$$

および評価

1.  $0 \leq i \leq \deg \Lambda - \deg \gcd(\Delta, \Delta')$  なる  $i$  に対し  $\text{rank} E_{N_0(\Delta)-i} \leq i$
2.  $j \geq \deg \Lambda - \deg \gcd(\Delta, \Delta')$  なる  $j$  に対し  $\text{rank} E_{N_0(\Delta)-n-j} \leq j$

を得ることができる。

## 証明の概略

### Manin の写像の次数

$K = \mathbb{C}(t), L = K(x, y), y^2 = 4x^3 - 3ax + b$  とおく。  $K$  上の導分  $\frac{\partial}{\partial t}$  に対応して  $\Omega_{L/K}/d(L)$  の  $K$ -導分、Gauss-Manin 接続  $\partial$  を定義することができる。 relative な一次形式  $\frac{dx}{y} \in \Omega_{L/K}$  の  $\Omega_{L/K}/d(L)$  における同値類は、 $\partial$  に関してある二階の微分方程式をみたす。この方程式は

$$(P_2 \partial \partial + P_1 \partial + P_0) \frac{dx}{y} \in d(L)$$

と計算された。

$(P_2 \partial \partial + P_1 \partial + P_0) \frac{dx}{y} \in d(L)$  となるので、楕円曲線  $E : y^2 = 4x^3 - 3ax + b$  の有理点  $s = (r, s)$  に対して式

$$\mu(s) = (P_2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + P_1 \frac{\partial}{\partial t} + P_0) \int_0^s \frac{dx}{y}$$

は積分経路によらずに定まり有理関数となる。この写像  $\mu : E(K) \rightarrow K$  は Manin の写像と呼ばれる。  $\mu$  は加群の準同型でそのカーネルは  $E(K)$  の torsion-part である。

主定理の証明は、 $\deg \mu(s)$  と  $\deg r$  との関係に対する気付きから始まった。論文の §2 で、ほとんどの場合  $\deg \mu(s) = -\frac{1}{2} \deg r + \deg(\Delta\Lambda) - 2$  であることを証明する。

### Manin の写像のコホモロジー的な意味

以下では次の記号を使う：

- $E$  の小平-Néron モデルを  $\tilde{E}$  とおく。
- elliptic fibration を  $\kappa : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  とおく。
- $A = \text{Spec } \mathbb{C}[t, \Delta^{-1}]$ ,  $E_{\Delta} = \kappa^{-1}A$  とおく。
- $\kappa$  の generic fiber を  $\mathfrak{f}$  とおく。
- 0-セクションを  $\mathfrak{o}$  とおく。
- $H_{\text{prim}}^1(\tilde{E}, \Omega_{\tilde{E}}^1) = \{c \in H^1(\tilde{E}, \Omega_{\tilde{E}}^1); c \cdot \mathfrak{f} = 0\}$  とおく。ここで  $c \cdot \mathfrak{f}$  は交叉を表す。

任意の  $c \in H_{\text{prim}}^1(\tilde{E}, \Omega_{\tilde{E}}^1)$  に対して、 $c$  の  $H^1(E_{\Delta}, \Omega_{E_{\Delta}}^1)$  への制限は  $H^1(E_{\Delta}, \kappa^* \Omega_A^1)$  の像に入り、それを下の図式に沿って  $\hat{u} \in H^0(A, R^1 \kappa_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_A^1)$  によって表すことができる。

$$H^1(E_{\Delta}, \kappa^* \Omega_A^1) \xrightarrow{\cong} H^0(A, R^1 \kappa_* \kappa^* \Omega_A^1) \rightarrow H^0(A, R^1 \kappa_* \mathbb{C} \otimes \Omega_A^1) \xleftarrow[\cong]{\cdot dt} H^0(A, R^1 \kappa_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_A^1)$$

よって写像  $\tilde{\mu} : H_{\text{prim}}^1(\tilde{E}, \Omega_{\tilde{E}}^1) \rightarrow \mathbb{C}(t)$  を

$$\tilde{\mu}(c) = P_2(\hat{u} \smile \partial \omega) + (P_2 \frac{\partial}{\partial t} + P_1)(\hat{u} \smile \omega)$$

で定義することができる。ここで

$$\smile : H^0(A, R^1 \kappa_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_A^1) \times H^0(A, R^1 \kappa_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_A^1) \rightarrow H^0(A, R^2 \kappa_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_A^1) \cong H^0(A, \mathcal{O}_A^1)$$

が cup 積であり、

$$\partial : H^0(A, R^1 \kappa_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_A^1) \rightarrow H^0(A, R^1 \kappa_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_A^1)$$

が Gauss-Manin 接続である。

$\kappa$  の任意のセクション  $s$  に対して  $\mu(s) = \tilde{\mu}(c(\mathcal{O}_{\tilde{E}}(s - \mathfrak{o})))$  であることを論文の §3 で証明した。

## 写像 $\tilde{\mu}$ の像

Algebraic de Rham cohomology を使って、 $H^1(\tilde{E}, \Omega_{\tilde{E}}^1)$  の生成元を明示的に計算し、上の定義にたどって  $\tilde{\mu}$  の像を計算した。 $\tilde{\mu}$  の像は多項式で  $\beta + \gamma\Lambda^2, \beta \in B, \gamma \in \mathbb{C}[t], \deg \gamma \leq \deg \Delta - \deg \Lambda - 2$  の形で書ける。 $\deg \mu(\mathfrak{s})$  と  $\deg r$  の間に関係があるので、 $\deg \tilde{\mu}$  に対する評価は  $\deg r$  の評価となり、一定次数以下の多項式たちの  $\mathbb{C}$ -ベクトル空間としての次元に対する評価は  $E_i$  のランクに対する評価となる。このように主定理は証明される。

## Algebraic de Rham cohomology の計算

$\mathbb{C}$  上の非特異代数多様体  $X$  の algebraic de Rham cohomology は二重複体

$$C^*(X, \Omega_X^0) \xrightarrow{d} C^*(X, \Omega_X^1) \rightarrow \dots \rightarrow C^*(X, \Omega_X^i) \rightarrow \dots$$

のコホモロジーである。ここで  $C^*(X, \Omega_X^i)$  は Čech 複体である。

これを計算するために、任意の射影多様体上の coherent sheaf  $\mathcal{F}$  に対して Čech cohomology を計算する機構を開発した。その方法は自由分解  $\mathcal{F} \leftarrow \mathfrak{F}$  :

$$0 \leftarrow \mathcal{F} \leftarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(-n_i) \leftarrow \dots \leftarrow \bigoplus_j \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(-n_j) \leftarrow 0$$

をとって二重複体

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^r(\mathbf{P}^r, \mathfrak{F}_0) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & H^r(\mathbf{P}^r, \mathfrak{F}_r) \\ & & \uparrow & & & & \uparrow \\ C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \longleftarrow & C^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}_0) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & C^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}_r) \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) & \longleftarrow & C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}_0) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}_r) \end{array}$$

を考えるものである。

$n \geq 1$  なる  $n$  に対して  $H^i(\mathbf{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(-n)) = 0$  ( $0 \leq i \leq r-1$ ) であり、 $H^r(\mathbf{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(-n))$  の基底は  $\{X_0^{l_0} \cdots X_r^{l_r} | l_i \leq -1, \sum l_i = -n\}$  と明示的に書ける。上の二重複体は同型  $H^i(X, \mathcal{F}) \cong h_{r-i}(H^r(\mathbf{P}^r, \mathfrak{F}_\cdot))$  を与えてくれるもので、この二重複体を使って自動的に diagram chasing をし、Čech cohomology を計算してくれるプログラムを Singular を使って作成した。本論文の結果は、このコンピューター・プログラムの計算によるところが大きい。

以上