論文審査の結果の要旨

氏　名　　　田　然

提出論文は、多項式環 $\mathbb{C}[t]$ 上，方程式

$$y^2 = 4x^3 - 3ax + b \qquad (a, b \in \mathbb{C}[t],\ \Delta = a^3 - b^2 \neq 0)$$

で定義される楕円曲線 E の $\mathbb{C}(t)$ 有理点

$$(x, y) = (r, s), \quad r, s \in \mathbb{C}(t)$$

を考察し，r の次数 deg r （有理式 r の次数とは，r の $t = \infty$ における増大度，すなわち $r = P/Q$ と多項式の比として表したとき deg $r =$ deg $P -$ deg Q である．上記楕円曲線を射影直線上の楕円曲面，有理点を楕円曲面の切断 $\sigma(t)$ と見れば，deg r は本質的には $t = \infty$ における $\sigma(t)$ と 0 切断の局所交点数である）について，新しい知見を与えている．

Yu. Manin は 1966 年，関数体上の曲線に対する Mordell 予想を，代数多様体でパラメトライズされた曲線として実現される幾何学モデルに付随する Hodge 構造の変動によって定まる自然な接続，いわゆる Gauss-Manin 接続を導入することによって解決した．その論文の中で，上記の楕円曲線 $E = E_{a,b}$ に対して定数 $C = C_{a,b}$ が定まって，有理点 $(x, y) = (r, s)$ に対して，$\deg(r) \leq -C$ が成立することを指摘した．この結果は，直ちに Mordell-Weil の定理や整数点に関する Siegel の定理を導く強力なものである．しかしながら，Manin はこの定数 $C = C_{a,b}$ を明示的な形では与えていない．

一方 Davenport (1965) は，$E_{0,b}: \quad y^2 = 4x^3 + b$ に対しては

$$\deg\ r \leq 2 \deg b - 2$$

が成立する（言い換えれば，二つの多項式 $f, g \in \mathbb{C}[t]$ が $b = 4f^3 - g^2 \neq 0$ をみたせば $\deg f \leq 2b-2$ が成立する) ことを示している．その後 Hindry-Silverman (1988) は一般の $E_{a,b}$ の有理点 $(x, y) = (r, s)$ に対する評価

$$\deg\ r \leq 4 \deg\ \Delta_{\mathrm{red}} - 4 + \frac{\deg\ \Delta}{6}$$

を示した．ここで $\Delta = a^3 - b^2$ は判別式，Δ_{red} は被約判別式である．これら二つの結果は，Manin の方法とは異なり，古典的な Siegel の定理の方法を改良して用いている．

提出論文は，上記 Manin による Gauss-Manin 接続の具体的計算を実行し，deg r に対する新しい不等式を証明した．本論文で得られた不等式は当然ながら，Hindry-Silverman のものとは独立であるが，判別式 Δ の根の重複度が小さい場合（より「一般的な」場合）には，より良い不等式を与える．記号がきわめて煩雑になるため，本論文の不等式を最も強い形で書き下すことはしないが，結果をより精密化するための技術的補正項を省き，本質的部分だけに単純化した形は，$2\frac{db}{dt}a - 3\frac{da}{dt}b \neq 0$（すなわち $E_{a,b}$ の J-不変量が定数でない）場合，

$$\deg\ r \leq 2\deg\Delta + 2\deg\left(2\frac{db}{dt}a - 3\frac{da}{dt}b\right) - 2$$

である．この不等式を使うと，一般論により，$E_{a,b}$ の Mordell-Weil 階数もエフェクティブに上から評価することができる．

Davenport の定理にあらわれる楕円曲線 $E_{0,b}$ の場合は J 不変量が定数（モジュライが一定）であるから，上記の不等式そのものは適用できないが，Gauss-Manin 接続それ自身は非自明で，その計算により Davenport 不等式の精密化である

$$\deg\ r \leq 2\deg\ b_{\mathrm{red}} - 2$$

という不等式を本論文では得ている（ここで b_{red} は多項式 b の被約部分）．実は上記の不等式は，$a = 0$ という条件を弱め $a =$ (定数) としたときも

$$\deg\ r \leq 2\deg\ \Delta_{\mathrm{red}} - 2$$

という形に一般化され，これは従来の文献には見えない新しい結果である．

本論文の主要結果の証明に用いられた手法は，本質的には Manin のアイデアによるもので，決して新しいものではない．しかしながら Gauss-Manin 接続の計算，すなわち楕円曲面の相対微分形式をファイバーに沿って 0 切断から与えられた切断 σ まで積分し，それを底空間のパラメータで微分するという操作（Gauss-Manin 接続の作用）を具体的に実行することは，決して容易なことではなく，かなりの計算力が必要である．またこうして得られた不等式は，しばしば古典的方法によって証明された Hindry-Silverman や Davenport の定理より良い評価を与えており，関数体上の楕円曲線の理論に，一定の新しい貢献をしたものと認められる．また本論文で用いられた方法は，一般の一変数関数体上定義された楕円曲線の場合にも容易に一般化できるものである．

よって、論文提出者　田然は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．