論文の内容の要旨

Rationality of the moduli spaces of 2-elementary $K3$ surfaces

(対合付き $K3$ 曲面のモジュライの有理性)

馬　昭平

複素 $K3$ 曲面 X とその上の周期に非自明に作用する対合 ι の組 (X,ι) を 2-elementary $K3$ 曲面と呼ぶ。Nikulin の分類によってそのような組は位相的には７５種類あることが知られており、各位相型は適当な自然数の三つ組 (r,a,δ) によってラベルづけられる。位相型 (r,a,δ) を一つ固定すればそれに属する 2-elementary $K3$ 曲面たちの同型類はある代数多様体 $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$（モジュライ空間）によって自然にパラメトライズされる。周期写像の理論により、$\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ は適当な IV 型対称領域の算術商から因子を除いた補集合として構成することができる。本論文の主題はこのモジュライ多様体 $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ の双有理型を調べることである。具体的には次の結果を証明する。

定理 0.1. 以下の８つの (r,a,δ) を除きモジュライ空間 $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ は有理的、すなわち射影空間と双有理同値である*:*
$(1,1,1),(2,2,0),(10,10,1),\ (r,22-r,1), 11\leq r\leq 15$。

こうしてほとんどの $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ は双有理変換を除けば最も単純な代数多様体であることがわかった。別の言葉で言い換えれば、それらの算術商 $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ に対する保型函数体は $\mathbb{C}$ 上純超越的である。

いくつかの $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ は従来有理的であると知られていた。$\mathcal{M}_{10,10,0}$ と $\mathcal{M}_{10,2,0}$ は金銅によって有理性が証明され、$\mathcal{M}_{5,5,1}$ は Shepherd-Barron の研究によって実質的に有理性が示されていた。$\mathcal{M}_{10,10,0}$ は特に Enriques 曲面のモジュライであり、$\mathcal{M}_{5,5,1}$ は種数６の曲線のモジュライと自然に双有理同値である。本研究はそれらの研究をモデルとしており、それらの先行結果が実はより一般的な現象の中に位置づけられることを示している。残りの８つの $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ が有理的か否かはまだ明らかではない。有理性より少し弱い性質だが、それらが単有理的であることはわかっている。

さて、何かあるモジュライ空間 $\mathcal{M}$ が有理的であることを証明しようとする時には、代数群の作用の問題（広い意味での不変式論）に持ち込むことが一つの標準的手法である。具体的には、(1) $\mathcal{M}$ のメンバーの構成方法を考案することでパラメータ空間 U を定義する。U には自然な変換群 G が作用している。(2) 商多様体 U/G から $\mathcal{M}$ への自然な写像を調べる。もしも (1) で考案した構成法が標準的なものであったならばこれは双有理同型になる。(3) その時 U への G 作用を解析して U/G の有理性を示す、という手順を踏む。同型類をパラメトライズする $\mathcal{M}$ よりも G 作用の無駄を許して具体的な記述方法を与える U の方から解析を始めるのである。もちろん U の構成は $\mathcal{M}$ のメンバーの個性に完全に依存しており、また (3) の解析はデリケートさを伴うことが多い。その結果、一般にモジュライの有理性問題というのは個別解析の傾向が強く、本研究も例外にもれない。１つ１つ $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ の有理性を証明していくのである。とはいえほとんどの $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ に対して共通した構成のスキームを採るのでそれを以下説明しよう。

与えられた (r, a, δ) に対して、適当な Hirzebruch 曲面もしくは射影平面 Y の上のある種の決められたタイプの特異性と既約分解を持つ $-2K_Y$ 曲線の族を考え、そのパラメータ空間を U とする。Y の自己同型群を G とする。各 $B \in U$ に対して B で分岐する Y の２重被覆をとってその特異点を解消すれば $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ のメンバーが得られる。（より正確には、(r, a, δ) にヒットするように予め特異性等を規定しておいた。）この構成によって周期写像 $\mathcal{P} : U/G \to \mathcal{M}_{r,a,\delta}$ が定まるのだが、この写像は必ずしも双有理同型になるとは限らない。こうした構成法 U は幾つも考えられるので、そこで、いろいろな U を試してみてその中から $\mathcal{P}$ が次数１になるものがあるか探し当てることをする。本論文の 4.3 節ではこの種の周期写像の次数を系統的に計算するレシピを提示した。実際の証明は長くなるもののこのレシピに従えば次数計算は容易である。そうして実験の末 $\mathcal{P}$ が次数１になるような (U, G) が見つかれば上で説明したように G 作用の解析に帰着する。

この構成を少し角度を変えて説明しよう。(Y, B) というのはそれから作られる 2-elementary $K3$ 曲面の商曲面と分岐曲線をブローダウンしたものである。この時 $\mathcal{P}$ の次数というのは与えられたタイプの (Y, B) たちにブローダウンするやり方が何通りあるかを数えており、それが１通りしかないようなタイプを探して $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ の研究に利用するのである。それが見つかれば、商と分岐そのものよりもそれを（１通りしかない）ブローダウンによって単純な曲面上の特異な曲線に転換した方が解析がしやすい。というのは、２つあったモジュライ要素が１つに統合されるし、よくわかっている群 G の作用の問題に帰着するからである。

これが基本的な議論のスキームだが、次数１の周期写像が見つからずこの枠組みからはみ出す場合も幾つかある。その主要なものは $r = a \geq 3$ と $r + a = 20, r \leq 14$ の２系列である。前者は del Pezzo 曲面の標準的な幾何

を用いて解析される。後者の系列の研究が実の所本論文の到達点である。次数計算のレシピを応用して、del Pezzo 曲面の幾何がより意外な形で見出された。

　最後に、筆者を育ててくれた指導教官の吉川謙一先生と宮岡洋一先生に深い感謝の意を表したい。修士課程の始めに吉川先生が $K3$ 曲面という豊かな題材を紹介してくれたことが、筆者が数学の道を進む契機となった。本研究に取り組んだのも吉川先生の示唆に基づいている。吉川先生の転出に伴って、宮岡先生が博士課程の途中から指導教官を引き受けてくれ、筆者の成長を促しつつ様々な相談事に親身になってアドバイスをくれた。この 2 人の先生に出会えたことは誠に幸運なことであったと思う。