

論文審査の結果の要旨

氏名 馬 昭平

代数幾何学において、K3 曲面は楕円曲線とならび、もっとも興味をもたれてきた対象であり、そのモジュライ空間は、種々さまざまな立場から研究されている。もっとも標準的なアプローチは偏極付き K3 曲面のモジュライの研究であるが、適当な付加構造付き K3 曲面のモジュライ理論もおとらず重要であり、興味深い。

提出論文は、K3 曲面 X と X の非シンプレクティックな対合 ι の組 (X, ι) (簡単のために対合つき K3 曲面と呼ぶ) のモジュライを考察し、75 個の既約成分のうち、8 個を除いた他のすべてが有理多様体であることを証明した (残った 8 個が有理多様体か否かは未解決問題である)。言い換えれば、対合付き K3 曲面は本質的に、何個かの自由パラメータによって、無駄なくパラメトライズされるという結果である。対合付き K3 曲面のモジュライ空間の成分のうちいくつかについては、金銅誠之 (Enriques 曲面のモジュライ) や Shepherd-Barron-Artebani-Kondo (後述のモジュライ成分 $\mathbb{M}_{5,5,1}$) によって有理性が示されていた。本論文はこうした先行結果が例外的な現象ではないことを示した基本的かつ重要な結果であって、専門家による評価はきわめて高い。

以下に結果の概略を述べる。

対合付き K3 曲面 (X, ι) の変形同値類は、Piatetski-Shapiro-Shafarevich による Torelli 型定理によって、2 次コホモロジー群の ι 不変部分 $H^2(X, \mathbb{Z})_+$ の格子構造によって定まる。Nikulin の定理によるとこの格子構造は主不変量と呼ばれる 3 つの整数の組 (r, a, δ) でパラメトライズされ、可能な主要不変量は 75 種類ある。主要不変量 (r, a, δ) をもつ対合付き K3 曲面のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ と書くことにすると、本論文の主結果は次の定理である。

定理 (r, a, δ) が $(1, 1, 1), (2, 2, 0), (10, 10, 1)$ のいずれでもなく、 $r + a = 22$ かつ $11 \leq r \leq 15$ でもなければ、 $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ は有理多様体である、

この定理の証明は、もっとわかりやすい他のモジュライ空間との関連を見いだすことによって得られる。

その際に重要な役割を果たすのが、ベクトル空間を連結可解代数群や $SL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times$ の線形作用で割ってできる商空間が有理多様体

であるという，宮田の定理および Katsyolo-Bogomolov の定理である．また代数多様体への群作用については，同変ファイバー空間構造が存在すれば，商空間の有理性問題は、しばしば底空間の商の有理性に帰着する．これらの定理や方法を用いれば， $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ の有理性を示すには，すでに有理性がわかっている別のモジュライ空間の適当な群による商と双有理的であることを示せばよいであろう．

これが証明の一般的な方針であるが，実際には状況はかなり複雑であって，モジュライの既約成分の固有の構造によって事情が異なるため，完全に一般論で片付けることはできず，状況に応じて，多彩なテクニックが必要となる．関連するモジュライとして登場するものもきわめて多彩である．もっとも自然にあらわれるものは，射影 $X \rightarrow X/l$ の分岐曲線のモジュライで，たとえば $\mathcal{M}_{3,3,1}$ に関連しては2つの通常2重点をもった6次曲線のモジュライが現れる．しかしながら，分岐曲線のモジュライだけではうまくいかないことも多く， $\mathcal{M}_{5,5,1}$ については，5次 Del Pezzo 曲面のモジュライ， $\mathcal{M}_{r,r-2,\delta}$ については Hirzebruch 曲面 F_{6-r} 上のある種の曲線の線形系を考えている．

本論文で用いられる道具としては，通常複素代数幾何のほかに，格子理論，言い換えれば二次形式論の深い結果が必要である．実際，格子理論（および Torelli 型定理）の詳しい解析を通じて $\mathcal{M}_{r,a,\delta}$ と，曲線や Del Pezzo 曲面のモジュライ空間との関連をつけることができるのである．

提出論文は，種々の技術的困難を克服して，ひとつの分野におけるほとんど決定的な成果を挙げたものとして，高く評価される．

本論文以外にも論文提出者には，すべて単著で，出版済の論文が4篇，掲載が決定している論文が2篇ある．そのうち Proceedings of the London Mathematical Society に出版予定の論文 “The unirationality of the moduli spaces of 2-elementary K3 surfaces” は，対合付き K3 曲面のモジュライ空間の連結成分が単有理的であることを示したもので，著者の第7論文である提出論文はその続編ないしは完結編と位置づけられる．それ以前の論文も，K3 曲面やアーベル曲面理論における顕著な業績であり，論文提出者はすでに有力な若手研究者として国際的に認知されている．

よって，論文提出者 馬昭平は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．