# 論文審査の結果の要旨

氏 名　横山 聡

論文提出者横山聡は，乗法的なホワイトノイズ項を持つ Navier-Stokes 方程式を 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 上で考え，周期境界条件の下，さらに全空間において，その弱解の存在を示した。確率的 Navier-Stokes 方程式の研究は多数知られているが，ラプラシアンに起因する強圧性を持つ場合の研究が殆どである。論文提出者が扱った方程式は，見かけ上は Navier-Stokes 方程式に近いにもかかわらず，強圧性を持たず，しかも乗法的ノイズは解の空間微分にかかっている。これらは，数学的には本質的な困難となる。なお，V.I. Arnold は体積を保存する微分同相写像の流れにエネルギーを導入し，その最小解から非粘性流体の Euler 方程式を導いているが，論文提出者が扱った確率的 Navier-Stokes 方程式は，エネルギーに Brown 運動による摇動項を付加して得られる変分問題の定常解から自然に導かれるものである。

2 次元周期境界条件の場合の解の構成は，4 段階を経て行われる。第 1 段階では Galerkin 近似を用いる。すなわち，方程式を有限次元確率微分方程式で近似し，それを時間大域的に解き近似解の列を構成する。第 2 段階では第 1 段階で求めた近似解のアプリオリ評価を求めている。通常の Navier-Stokes 方程式と異なる点は，確率項を含むため，時間に関する正則性が必要となるところである。非線形項の収束を言うために，アプリオリ評価はソボレフノルムについて示す必要がある。強圧性があれば，そのような評価は割合容易に得られるが，その欠如を補うために，2 次元空間でしか成立しないある恒等式を用いている。したがって本論文においては，2 次元という仮定は本質的である。第 3 段階で近似解の分布列のコンパクト性を示し，第 4 段階で極限分布が求める弱解を与えることを示している。

また，2 次元ユークリッド空間全体では，まず上記の方法により正方形上の周期解を構成し，次に正方形のサイズを大きくする極限を取ることにより，弱解を構成している。

証明の流れは，通常の Navier-Stokes 方程式と並行した議論を行う部分もあるが，確率偏微分方程式としての考察が本質的に必要であり，高い解析力を必要とする。また確率項を含む Navier-Stokes 方程式を始めとする非線形偏微分方程式の研究は十分に行われているとは言えず，この論文で与えられた手法は今後の研究に一つの方向を与える重要なものと認められる。流体現象は一般に極めて複雑であり，通常の Navier-Stokes 方

程式により記述できない現象も多くあると思われる。確率項を含む Navier-Stokes 方程式の研究は，このような意味で，流体現象解明の数学的アプローチにおいて極めて重要な役割を果たすと期待される。

このように論文提出者が得た確率項を持つ Navier-Stokes 方程式に関する結果は，流体現象の数学的研究において新しい視点を開くものとして大変興味深い。

以上のような理由により，論文提出者横山聡は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。