論文の内容の要旨
論文題目：Studies on the geometry of Mori dream spaces
（森夢空間の幾何学に関する研究）

氏名：大川新之介

はじめに

博士課程における著者の研究は森夢空間 (Mori dream space) の幾何学に関するものが主であった。本博士論文はその成果をまとめたものである。本文は 4 つの章からなり、第 1 章、第 2 章は [Ok1]、第 3 章は [Ok2]、第 4 章は [Ok3] が元になっている。以下、各章の内容を要約する。

1　第 1 章

第 1 章は森夢空間の基本性質に関するまとめである。ただし既知の結果を書き直しただけではなく、[HK] で得られた結果をより精密にし、整理した。

k を体とし、X を k 上射影的かつ正規で $\mathbb{Q}$ 分解的な代数多様体とする (以下、多様体といった場合にはこれらの性質を全て課すことにする)。X 上の直線束に様々な良い性質を課すことによって森夢空間が定義される (正確な定義は本文 Definition 1.1.2。以下定義・定理等は全て博士論文本文のものを引用)。

それらの強い条件を課しているために、森夢空間は著しく良い性質を持つ。特に、任意の因子 D に対して D-極小モデルプログラムが走り、しかも D が pseudo-effective の場合には最終的に semi-ample モデルにたどりつく。これは Zariski 分解の存在を意味する (Proposition 1.2.10)。

1.1　第 2 節

森夢空間 X に対し、その上の任意の因子 D の切断環 $R(X, D)$ は有限生成である。切断環が非自明ならば X からの自然な有理射 $\varphi_D : X \dashrightarrow \operatorname{Proj} R(X, D)$ が定まる。さて、因子 D の Zariski 分解を $D = P(D) + N(D)$ と書くことにしよう。このとき、2 つの因子 D、E が strongly Mori equivalent であるとは、φ_D と φ_E が同型であり、更に $N(D)$ と $N(E)$ の support が一致することである (Definition 1.2.11)。これは X の $\mathbb{Q}$ 因子に関する同値関係である。著者は森夢空間 X の

effective cone 上に扇の構造を導入し (Definition-Proposition 1.2.8) し、この扇に属する錐体の相対内部がこの同値関係の同値類になっているということを証明した (Proposition 1.2.13)。この結果は森夢空間の基本例である toric 多様体においては小田-Park の GKZ 分解として知られていたものであり、その一般化になっている。

1.2 第 3 節

この節においては、Cox 環の VGIT 理論を再構築した。また、GIT から定まる直線束の間の同値関係と strong Mori equivalence とが等価であることを証明した。

因子類群が有限生成な多様体に対し、Cox 環と呼ばれる、因子類群による次数づけを持つ環が定まる（Definition 2.4.1)。これが有限生成であることと多様体が森夢空間であることが同値である。森夢空間 X の Cox 環が定める affine 多様体 V には X の因子類群の dual torus T が自然に作用する。さらに、X 上の因子 (類) と T の指標とは自然に同一視できる。従って X 上の因子類に対して、対応する指標が定める半安定点集合 (これは V の開部分集合である。) が定まる。さて、X 上の因子類の間に、対応する指標が定める半安定点集合が一致するという条件によって同値関係を入れよう。第 3 節ではこの同値関係が strong Mori equivalence に一致することを示した (Proposition 1.3.8)。

2 第 2 章

第 2 章では、森夢空間から他の代数多様体への全射について考察した。主に Cox 環の見地から考えたため、実際には全射がある状況での多重切断環の振る舞いを調べた。

まず、森夢空間からの全射を持つ多様体はまた森夢空間になることを示した (Theorem 2.1.1)。これは任意標数の任意の全射について成立する。

次に、森夢空間の全射 $f : X \to Y$ のもとで X、Y 各々の扇がどのような関係にあるかを調べた。自然な埋め込み $f^* : \mathrm{Pic}(Y)_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ で $\mathrm{Eff}\,(X)$ 上の扇構造を $\mathrm{Pic}(Y)_{\mathbb{R}}$ に制限することができるわけであるが、実はこれが Y の扇と一致する、というのが結論である (Theorem 2.1.2)。第 1 章のところで述べたとおり扇に属する錐体の相対内部には 2 通りの解釈があったので、それぞれに応じて 2 通りの証明を与えた。

3 第 3 章

第 3 章では、森夢空間の global Okounkov body に関する Lazarsfeld 氏と Mustaţă 氏の予想について考察し、部分的な結果を得た。また、完全解決をするために重要と思われる関連問題をはっきり定式化した。

[LM] において (global) Okounkov body と呼ばれる概念が導入された。正確な定義は本文に譲るが、概要は以下の通りである。X を n 次元射影的代数多様体、L をその上の big 直線束とする。X

の部分多様体の列

$$Y_\bullet = (Y_0 = X \supsetneq Y_1 \supsetneq \cdots \supsetneq Y_n = \{pt\})$$

(旗と呼ばれる。) を与えるごとに、$\mathbb{R}^n$ 内の有界閉凸部分集合 $\Delta_{Y_\bullet}(X, L)$ が定まり、L の ($Y_\bullet$ に沿った)Okounkov body と呼ばれる。これは L の漸近的な情報を色々と含んでいると期待されており、例えば $\Delta_{Y_\bullet}(X, L)$ の Euclid 体積 (の $n!$ 倍) は L の体積に一致することが知られている。Toric 多様体の場合、豊富な直線束の Okounkov body は moment polytope に一致する。

Okounkov body を全ての直線束について束ねたものが global Okounkov body である。これは $\mathbb{R}^n \times \mathrm{N}^1(X)_{\mathbb{R}}$ 内の閉凸錐であり、big 直線束 $L \in \mathrm{N}^1(X)$ での fiber が L の Okounkov body と一致するものとして特徴付けられる (旗 $Y_\bullet$ は固定しておく)。

さて、一般に (global) Okounkov body は有理凸ではない。また、有理凸性は旗の選択にも依存する。一方で、非特異 toric 多様体の場合、toric strata を使って作った旗に関する global Okounkov body は有理凸であることが知られている [LM, Proposition 6.1 (ii)]。森夢空間は toric 多様体の拡張であるので、同様の性質が成り立つが否かが気になる。すなわち、

問題. 森夢空間 X は、global Okounkov body が有理凸になるような旗を持つか？

上記の問題は [LM, Problem 7.1] であり、筆者のオリジナルではない。

素朴なアプローチは、Okounkov body を次元に関して帰納的に計算することである。これは、$\Delta_{Y_\bullet}(X, L)$ の切り口が Y_1 上の或る直線束の Okounkov body と関係する (理想的な状況では一致する) からである (Lemma 3.3.1)。この方法で上述の問題を曲面の場合に証明した (Lemma 3.1.2)。

高次元の場合、次の問題を解決する必要が出てくる。

問題. 3 次元以上の森夢空間 X は、既約な因子であってそれ自体が森夢空間であるものを持つか？

この問題が肯定的に解決できれば、森夢空間 X は (2 次元以上の部分が) 森夢空間からなる旗を持つ。この旗に関する global Okounkov body は有理凸になるはずである (詳しくは Theorem 3.1.5)。この問題についても少々の考察を行ったが、解決の目処は残念ながら今のところ立っていない。

4　第 4 章

森夢空間の重要な例として、標数 0 の体上定義された Fano 型多様体がある。[SS, Theorem 1.2] において、Fano 型多様体の殆ど全ての素数における還元が globally F-regular であることが証明された。この逆が成立するのか、という問 [SS, Question 7.1] があるのだが、第 4 章ではこれを曲面の場合に解決した (Theorem 4.1.1)。

共同研究 [GOST](参考論文 3) において、多様体が森夢空間であることが先にわかっている場合には [SS, Question 7.1] が正しいことを証明した [GOST, Theorem 1.2]。証明の最大のポイントは、森夢空間であるために反標準因子に関する MMP が存在する点である。

第 4 章の証明では最初に、各正標数における還元が森夢空間であることを示した。特に 1 つの素

数において反標準因子 MMP が走るのであるが、直線束の変形理論等を用いてこれを標数 0 まで持ち上げたところが新しいアイディアである。

参考文献

[GOST] Y. Gongyo, S. Okawa, A. Sannai, and S. Takagi, *Characterization of varieties of Fano type via singularities of Cox rings*, arXiv:1201.1133.

[HK] Y. Hu and S. Keel, *Mori Dream Spaces and GIT*, Michigan Math. J. **48** (2000).

[LM] R. Lazarsfeld and M. Mustaţă, *Convex bodies associated to linear series*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 5.

[Ok1] S. Okawa, *On Images of Mori Dream Spaces*, arXiv:1104.1326.

[Ok2] S. Okawa, *Surfaces of globally F-regular type are of Fano type*, preprint.

[Ok3] S. Okawa, *On global Okounkov bodies of Mori dream spaces*, in the proceedings of the Miyako-no-Seihoku Algebraic Geometry Symposium (2010). Also available on

`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~okawa/papers.html`

[SS] K. Schwede and K. Smith, *Globally F-regular and log Fano varieties*, Adv. Math. **224** (2010), no. 3.