論文の内容の要旨

論文題目　マルチンゲール理論およびその数理ファイナンスへの応用
　　　　　に関する幾つかの性質

氏　　名　高岡 浩一郎

マルチンゲールとは「公平なゲーム」というイメージに対応した確率過程のクラスであり，ゲームや賭け事に関係する確率現象だけでなく，直接関係のない確率現象の分析にも随所に顔を出す概念である．本論文は，マルチンゲール理論およびその数理ファイナンスへの応用に関する計 3 つの話題，すなわち (1) マルチンゲールの一様可積分性，(2) 数理ファイナンスの基本定理，(3) 新しい株価過程モデルの提唱と分析についての研究成果である．

5 つの章から成っており，第 1 章では日本語で全体の概説を行っている．そして第 2 章はマルチンゲールの一様可積分性に関する章である．実マルチンゲール $M = \{M_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が確率変数族として一様可積分であることと，時刻 ∞ も込めて $\{M_t\}_{t\in[0,\infty]}$ がマルチンゲールであることの同値性が古典的な結果として知られている．与えられた（局所）マルチンゲールの一様可積分性のチェックは一般には難しいので，その絶対値の上限 $\sup_t |M_t|$ や 2 次変分 $\langle M\rangle_\infty$ を用いて一様可積分性を特徴付けることへの興味が生じた．この話題に関する先行研究 Azéma-Gundy-Yor (1980) を精緻化し，さらに Elworthy-Li-Yor (1997) と Galtchouk-Novikov (1997) の定理の仮定（M が下に有界であるという仮定）を緩めて適用範囲を拡げたものが，第 2 章の主結果である．

定理 2.1.1　$M = \{M_t\}_{t\in[0,\infty)}$ は，通常の条件を満たすフィルター付き確率空間上の実連続局所マルチンゲールとする．確率 *1* で $M_\infty := \lim_{t\to\infty} M_t$ が存在し，かつ $E\big[|M_\infty|\big] < \infty$ であると仮定する．このとき *2* つの極限

$$\ell^{(1)} := \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\, P\big[\, \sup_t |M_t| > \lambda \big] \quad \text{および} \quad \ell^{(2)} := \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\, P\big[\, \langle M\rangle_\infty^{1/2} > \lambda \,\big]$$

が存在して，

$$\ell^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\ell^{(2)} = \sup_{\tau:\ \text{stopping time}} E\big[\,|M_\tau|\,\big] - E\big[\,|M_\infty|\,\big]$$

が成り立つ（ただし $\ell^{(1)} = \ell^{(2)} = \infty$ の可能性もある）．さらに，M が一様可積分マルチンゲール $\iff$ $\ell^{(1)} = \ell^{(2)} = 0.$

この定理の証明において極限 $\ell^{(2)}$ の存在を示すのが最も難しいが，M と 2 次変分が等しい局所マルチンゲール $N_t := -\int_0^t \mathrm{sgn}(M_u)dM_u$ を考え，これに田中の公式や Skorohod 方程式の議論を適用して $\ell^{(2)}$ の存在を示していくのが，証明の主なアイデアである．

第 3 章は数理ファイナンスの基本定理に関する章である．確率過程を用いた資産価格過程のモデル化に関して，Harrison-Kreps (1979) および Harrison-Pliska (1981) は，無裁定条件と同値マ

ルチンゲール測度（資産価格過程をマルチンゲールにする確率測度）の存在との同値性を示すことにより，マルチンゲール理論と無裁定理論とを結びつけた．彼らの定理およびその様々な一般化は総称して数理ファイナンスの基本定理と呼ばれている．Harrison-Kreps や Harrison-Pliska の定理は離散時間かつ有限確率空間の設定下での結果だが，連続時間の設定下での定理として有名な Delbaen-Schachermayer (1994, 1998) は，一般の $\mathbb{R}^d$ 値セミマルチンゲールに対して，無裁定条件を少し強くした NFLVR (No Free Lunch with Vanishing Risk) 条件と同値 σ-マルチンゲール測度（資産価格過程を σ-マルチンゲールにする確率測度）の存在との同値性を示した．また NFLVR を少し弱くした NUPBR (No Unbounded Profit with Bounded Risk) 条件と，同値 σ-マルチンゲール測度の存在を少し弱くした条件との同値性が， $\mathbb{R}^d$ 値連続セミマルチンゲールに対しては Choulli-Stricker (1996) によって示され，また一般の実セミマルチンゲールに対しては Kardaras(2011) によって示された．この同値性が一般の $\mathbb{R}^d$ 値セミマルチンゲールに対しても成り立つことを証明したのが，第 3 章の主結果である．

定理 3.2.5　$S = \{S_t\}_{t\in[0,T]}$ は，通常の仮定を満たすフィルター付き確率空間上の $\mathbb{R}^d$ 値セミマルチンゲールとする，ただし T は満期を表す正定数．このとき以下の *2* つの性質は同値である．

(i) *NUPBR* 条件が成り立つ，つまり実確率変数族

$$\left\{ (H\bullet S)_T \,\middle|\, H \text{ は } \mathbb{R}^d \text{ 値可予測過程で，} S\text{-可積分かつ } H\bullet S \geq -1 \text{ a.s.} \right\}$$

が実確率変数空間 L^0 において有界である．ただし $H\bullet S$ は，H の S についてのベクトル伊藤積分を表す．

(ii) 値が正の局所マルチンゲール Z で，$E[Z_0] < \infty$ かつ ZS が σ-マルチンゲールになるようなもの *(strict martingale density)* が存在する．

この定理の証明方法は，上記の Choulli-Stricker や Kardaras の論文とは全く異なり，基準財をうまく変更させて Delbaen-Schachermayer の定理に帰着させる方法をとっている．次元に依らず適用可能な手法である．

第 4 章および第 5 章では，新しい株価過程モデルの提唱と分析を行っている．株式オプションなどの派生証券（デリバティブ）の価格付けの際に用いる株価変動モデルの原型として有名なのは，Black-Scholes モデル (1973) である．1 銘柄の株価過程を幾何 Brown 運動でモデル化し，安全債券価格を $B_t := e^{rt}$ とモデル化するという計算上扱いやすいモデルだが，モデルでは定数と仮定している瞬間的ボラティリティが実際には変動しているなど，実際の株価データと合致しない点が早い時期から指摘されてきた．モデルを現実により近付けるために，様々な拡張／代替モデルが先行研究で提唱されている．本論文では，安全債券価格を Black-Scholes モデルと同様にモデル化し，1 銘柄の株価過程モデルとしては

$$S_t^{(1)} := s_0\, e^{rt} \int_0^\infty \exp\left\{ \nu(W_t + Ct) - \frac{\nu^2}{2}t \right\} \lambda(d\nu) \qquad \text{（第 1 拡張モデル）}$$

および

$$S_t^{(2)} := s_0\, e^{rt}\ \frac{1}{\int_0^\infty \exp\left\{\,\nu(W_t + Ct)\ -\ \frac{\nu^2}{2}t\,\right\}\lambda(d\nu)} \qquad \text{（第 2 拡張モデル）}$$

という 2 種類の拡張型 Black-Scholes モデルを提唱している．ただし W は，通常の仮定を満たすフィルター付き確率空間上の 1 次元 Brown 運動で $W_0 = 0$ とし，フィルトレーションは W から生成されているとする．また λ は $\big([0,\infty),\,\mathcal{B}([0,\infty))\big)$ 上の決定論的な測度で

$$\lambda([0,\infty)) = 1 \qquad \text{かつ} \qquad \int_0^\infty \nu\lambda(d\nu) < \infty$$

を満たすものとする．そして $s_0 > 0,\, r,\, C$ の 3 つは定数である．s_0 は初期株価を表す．2 つの拡張モデルの割引株価過程は，互いに逆数の関係になっている．決定論的な測度 λ の形を 1 つ定めるごとに株価過程のダイナミクスが 1 つ定まることになり，特に λ が 1 点に集中している設定は Black-Scholes モデルと一致する．また今回の拡張モデルは局所ボラティリティモデルの範疇に入り，それぞれのモデルに対して割引株価過程をマルチンゲールにする確率測度が唯一定まる．第 4 章ではモデルの提唱後に，両モデルに関する幾つかの数学的性質やこれらのモデルに基づくオプション価格について論じている．また経済学の均衡論的な議論からモデルを導いて，測度 λ が経済学的に「リスク許容度の市場における分布」と解釈できることを示している．また第 5 章では，両モデルの瞬間的ボラティリティ過程

$$\sigma_t := \frac{\int_0^\infty \nu\ \exp\left\{\,\nu(W_t + Ct)\ -\ \frac{\nu^2}{2}t\,\right\}\lambda(d\nu)}{\int_0^\infty\ \exp\left\{\,\nu(W_t + Ct)\ -\ \frac{\nu^2}{2}t\,\right\}\lambda(d\nu)}$$

の挙動や，局所ボラティリティ関数およびインプライド・ボラティリティ関数について調べている．インプライド・ボラティリティが第 1 拡張モデルに対しては行使価格について狭義単調増加だが第 2 拡張モデルに対しては狭義単調減少であるなど，第 2 拡張モデルの性質のほうが現実の株価データと符合している．