

論文審査の結果の要旨

氏名 高岡 浩一郎

本論文は、数理ファイナンスに関連したマルチンゲール理論の問題の研究を行っており、さらに2種類の新しい証券過程モデルを提唱しそれらについて解析を行っている。

マルチンゲール理論に関連した結果の主要なものは以下の2つの定理である。

定理 $M = \{M_t\}_{t \in [0, \infty)}$ は、通常の状態を満たすフィルター付き確率空間上の実連続局所マルチンゲールとする。確率1で $M_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ が存在し、かつ $E[|M_\infty|] < \infty$ であると仮定する。このとき2つの極限

$$\ell^{(1)} := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\left[\sup_t |M_t| > \lambda\right] \quad \text{および} \quad \ell^{(2)} := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P\left[\langle M \rangle_\infty^{1/2} > \lambda\right]$$

が存在して、

$$\ell^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ell^{(2)} = \sup_{\tau: \text{stopping time}} E[|M_\tau|] - E[|M_\infty|]$$

が成り立つ (ただし $\ell^{(1)} = \ell^{(2)} = \infty$ の可能性もある)。さらに、 M が一様可積分マルチンゲール $\iff \ell^{(1)} = \ell^{(2)} = 0$ 。

この結果は Azéma-Gundy-Yor (1980) の精緻化、Elworthy-Li-Yor(1997), Galtchouk-Novikov (1997) の結果の拡張となっている。

定理. $T > 0$, とし、 $S = \{S_t\}_{t \in [0, T]}$ は通常の状態を満たすフィルター付き確率空間上の \mathbb{R}^d 値セミマルチンゲールとする。このとき以下の2つの性質は同値である。

(i) $NUPBR$ 条件が成り立つ。則ち実確率変数族

$$\{(H \bullet S)_T \mid H \text{ は } \mathbb{R}^d \text{ 値可予測過程で、} S\text{-可積分かつ } H \bullet S \geq -1 \text{ a.s.}\}$$

が実確率変数空間 L^0 において有界である。ただし $H \bullet S$ は、 H の S についてのベクトル伊藤積分を表す。

(ii) 値が正の局所マルチンゲール Z で、 $E[Z_0] < \infty$ かつ ZS が σ -マルチンゲールになるようなもの (strict martingale density) が存在する。

この結果は Choulli-Stricker (1996), Kardaras(2011) の結果の拡張となっている。

さらに本論文では、証券過程のモデルとして、

$$S_t^{(1)} = s_0 e^{rt} \int_0^\infty \exp \left\{ \nu(W_t + Ct) - \frac{\nu^2}{2}t \right\} \lambda(d\nu) \quad (\text{第 1 拡張モデル})$$

および

$$S_t^{(2)} = s_0 e^{rt} \frac{1}{\int_0^\infty \exp \left\{ \nu(W_t + Ct) - \frac{\nu^2}{2}t \right\} \lambda(d\nu)} \quad (\text{第 2 拡張モデル})$$

という 2 種類の拡張型 Black-Scholes モデルを提唱した。ただし W は原点から出発する 1 次元 Brown 運動で、フィルトレーションは W から生成されるものを考える。また λ は

$$\lambda([0, \infty)) = 1 \quad \text{かつ} \quad \int_0^\infty \nu \lambda(d\nu) < \infty$$

を満たす $([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty)))$ 上の測度、 $s_0 > 0$, r, C は定数である。

これらのモデルについて、無裁定条件を満たすことを証明すると共に、ヨーロッパ型コールオプションの価格公式など様々な公式を導いている。また、部分均衡の存在の証明など経済学的な考察も行っている。また、インプライドボラティリティの作る曲線についても数値計算を用いて調べている。

このように本論文ではマルチンゲール理論において新しい結果を得ると共に、証券価格の新しいモデルを提唱し、それに関して様々な結果を与えた。これは確率過程論及び数理ファイナンスの観点から高く評価できるものである。

よって、論文提出者 高岡 浩一郎 は、博士 (数理学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。