論文の内容の要旨

論文題目　An *abc*-type Inequality and Arithmetic Dynamics on Rational Varieties Based on Nevanlinna Theory and Vojta's Conjecture

(ネヴァンリンナ理論とボイタ予想に基づく有理多様体上の abc 型問題と数論的力学系の研究)

氏　　名　安福 悠

この論文では，ディオファントス幾何の重要な予想のひとつであるボイタ予想に関連する，射影平面のブローアップ上や射影空間上での 3 つの結果を扱っている．第一章の背景で詳述されているように，ボイタ予想とは元々，有理型関数の値分布に関する複素解析学の一分野であるネヴァンリンナ理論に基づいている．具体的に，ネヴァンリンナ理論とは，有理型関数 $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ と値 $a \in \mathbb{C}$ に対し，半径 r の円上でどれだけ f が a に近い値をとるかを測る接近関数

$$m_f(a,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\left(0,\ \log\frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\right)\, d\theta$$

と，半径 r の円内で f が丁度 a の値をとる回数を原点に近い所に重みをつけて数えあげる個数関数

$$N_f(a,r) = \sum_{0<|z|<r} \max(0,\ \mathrm{ord}_z(f-a)) \log\frac{r}{|z|} + \max(0,\ \mathrm{ord}_0(f-a)) \cdot \log r$$

の間の密接な関係についての理論である．ネヴァンリンナ理論の第一主要定理は，位数関数と呼ばれる $T_f(a,r) = m_f(a,r) + N_f(a,r)$ が，a を変えても r の関数として有界な差しか現れないことを主張する．特に，f が a の値をとらないならば，その分 a に近い値をとる頻度が多い事で調整される．次に，第二主要定理は，任意の $\epsilon > 0$ に対し，測度 0 の集合 $E(\epsilon)$ があり，

$$\sum_{i=1}^{q} m_f(a_i, r) \le 2T_f(\infty, r) + O(\max(0, \log T_f(\infty, r)) + o(\log r)$$

が $r \notin E(\epsilon)$ で成り立つことを言う．つまり，いくつもの接近関数が同時にあまり大きくなることがない．

ボイタ [4] は，この第二主要定理と，ディオファントス近似のロスの定理の類似性に着眼し，ネヴァンリンナ理論の概念と整数論の概念を結びつけるいわば辞書を作り出した．本論文の第一章で詳しく解説しているように，例えば有理型関数は無限個の有理数に，接近関数は局所高さの有限和に，位数関数は高さ関数に対応する．この辞書を使うと，第二主要定理の誤差項を少し弱めたものが丁度ロスの定理に翻訳されることが分かる．そこでボイタは，ネヴァンリンナ理論の第二主要定理の高次元化の試みであるグリフィス予想を，彼の辞書を使ってディオファントス近似に翻訳した．これがボイタ予想で，具体的には次の主張である．

ボイタ予想. k を数体，X を滑らかな k 上射影代数多様体とする．X 上の因子として，D を直交交叉因子，K を標準因子とし，A を豊富な因子とする．S を k の付値の有限個の同値類とし，$v \in S$ に対し，局所高さ $\lambda_D(-,v)$ を固定し，また大域高さ $h_A(-)$ と $h_K(-)$ を固定する．この時，任意の $\epsilon > 0$ に対し，*Zariski* 閉で X には等しくない $Z = Z(\epsilon)$ と定数 C があり，

$$\sum_{v \in S} \lambda_D(P, v) + h_K(P) < \epsilon h_A(P) + C$$

が $P \in X(k) \backslash Z$ で成り立つ．

右辺は ϵ があるため小さいので，上の式の左辺も小さい．因子に点が v 進距離で近いほど局所高さ関数は大きいので，有理点が因子 D にあまり近づけない，というのがこの予想の主張である．標準因子 K に負の部分があれば，その分だけ有理点が D に近づくことができ，大域的幾何の情報である標準因子が，有理点が因子にいかに近づけるかという整数論の近似の問題を制御している．この予想は大変強力で，例えば射影空間上の線形因子に関しては，シュミットの部分空間定理と同値であり，またこの予想はモーデル予想（ファルチングス

の定理) やボンビエリ・ラング予想も導く．しかしながら，多くの場合で未解決であり，なぜこの予想が成り立つのかを理解する上でより多くの具体例での考察が欠かせない．

本論文にはボイタ予想に基づく結果が3編含まれている．第二章が一編目で，射影平面のブローアップ上でのボイタ予想と，整数論の最も重要な予想のひとつである abc 予想との関連である [7]．主結果は次である．

定理. D を射影平面上の三角形とし，三角形の丁度一辺だけにのっている点で射影平面をブローアップしたものを $X^{(1)}$ とし，例外因子を $E^{(1)}$ とする．続いて，$E^{(1)}$ 上だが D の固有変換上にはない点で $X^{(1)}$ をブローアップしたものを $X=X^{(2)}$ とし，新しい例外因子を $E^{(2)}$ とする．このとき，X 上の因子 $\widetilde{D}+\widetilde{E^{(1)}}+E^{(2)}$ のボイタ予想は，a を S 単数，$b=1-a$，$c=1$ としたときの abc 予想を導く．

この場合，a を割る素数は S に含まれる有限個のみのため，abc 予想は，任意の $\epsilon>0$ に対し，ある定数 C があり，

$$|a|<C\mathrm{rad}(1-a)^{1+\epsilon}\qquad a \text{ は } S \text{ 単数}$$

となる．これは未解決である．ボイタ予想から abc 型の問題を導けること自体は驚きではなく，現にボイタが任意次元でのボイタ予想を仮定して abc 予想を導いている [5]．本章の結果の重要性は，特殊ケースとはいえ，幾何学的に単純な有理平面一つの上でボイタ予想を仮定するだけで，abc 型という整数論の難題を導けてしまう点，そして，この定理の $X^{(1)}$ 上ではボイタ予想はシュミットの部分空間定理から導ける [7] にもかかわらず，そこから一度ブローアップした $X^{(2)}$ 上では，ボイタ予想の中身が格段に深遠になる点である．ブローアップは幾何学的に双有理であり，しかも因子の構造もあまり変わらない．幾何学が整数論を制御する予想であるボイタ予想もブローアップによっては大きくは変わらないと思われているため，この結果は意外である．$X^{(2)}$ 上でのボイタ予想は知られていないが，一般の有理曲面上でコルバヤとザニエーの手法 [1] に基づいて筆者が限定的には証明しているので [6]，この視点から abc 予想をみるのは興味深い．上記定理の証明には，単数方程式の解の有限性など，ディオファントス方程式の結果も使われている．

本論文の第三章は2編目の結果で，射影空間上のボイタ予想と数論的力学系の関連を初めて扱ったものである．数論的力学系とは，数体上の代数多様体 X の自己写像 $\phi: X\longrightarrow X$ の多重合成 $\phi^{(n)}=\underbrace{\phi\circ\cdots\circ\phi}_{n\text{ 回}}$ の数論的性質を調べる分野である．例えば，軌道

$$\mathcal{O}_\phi(P)=\{P,\phi(P),\phi^{(2)}(P),\phi^{(3)}(P),\dots\}$$

が有限集合であるような有理点 P が (固定された) 数体上有限個なのか，などが典型的問題である．第三章の論文の主結果は，軌道の整数点についての次の定理である．

定理. $\phi:\mathbb{P}^N\longrightarrow\mathbb{P}^N$ を $\mathbb{Q}$ 上定義できる次数 d の射とする．H を超平面とし，これが $X_0=0$ で定義されるよう $\mathbb{P}^N$ 上の座標を固定する．$P\in\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ に対し，$P=[a_0:\cdots:a_N]$ となる，公約数を持たない $a_i\in\mathbb{Z}$ を取ることができる．同じように $\phi^{(m)}(P)=[a_0^{(m)}:\cdots:a_N^{(m)}]$ とおく．この時ボイタ予想を仮定すると次が導ける．

(a) $d^n>N+1$ でかつ $\left(\phi^{(n)}\right)^*(H)$ が直交交叉因子になるような n が存在し，また $P\in\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ の軌道のどの無限集合も *Zariski* 密ならば，P の軌道 $\mathcal{O}_\phi(P)$ には有限個の整数点 $\mathbb{Z}(\mathbb{P}^N\backslash H)$ しかない．つまり，$a_0^{(m)}=\pm1$ となる m は有限個しかない．

(b) (a) と同じ条件を全ての n が満たすのであれば，軌道の無限集合が *Zariski* 密な P に対し，次が成り立つ．

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\log\left|a_0^{(m)}\right|}{\log\max_i\left|a_i^{(m)}\right|}=1.$$

$N=1$ の場合は，ロスの定理を使ってシルバーマンがより弱い条件のもとで証明している [3]．ロスの定理の高次元版をボイタ予想と捉えることができるので，上記の定理でボイタ予想を仮定するのは自然である．しかしながらボイタ予想を使う以上，直交交叉の条件を外すことは難しい．また，証明では高さ関数を使って軌道の点の座標の大きさを調べるため，射であるという条件 (つまり $\phi=[F_0:\cdots:F_N]$ と d 次斉次多項式で書いた時，F_i の共通の零がない) も外せない．このような不完全性はあるが，一般の位置の射は (a) の条件を満た

すため，一般の射による軌道には整数点が有限個しかないことが分かる．この論文のなかで具体的な例も扱っている．

第四章が3編目の論文で，ボイタ予想を仮定せずに第三章の類似結果を得られる具体例を考察したグレガー氏との共著である [2]．具体的には，射影平面上の単項式写像，つまり $\phi = [F_0 : F_1 : F_2]$ で F_i が単項式となっているものを分析した．このような写像は射ではなく有理写像なので，厳密には第三章の論文の具体例ではない．射でない分，必ずしも第三章の主結果の通りにならないが，逆に第三章の結果を有理写像へ拡張する際の土台にもなりうる結果である．

この章は主に3つの結果からなる．ϕ を非斉次化すると，$F_0/F_2 = x^i y^j$, $F_1/F_2 = x^k y^l$ となり $(i,j,k,l \in \mathbb{Z})$，この指数を行列化した $A = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ が重要な役割を果たす．これは，$(1,1)$ でのヤコビアンと捉えることができ，$\phi^{(n)}$ を非斉次化し指数を行列化すると A^n となるので，多重合成の性質を司る．ここでの整数点は，$\mathbb{Z}(\mathbb{P}^2 \backslash (Z=0))$，つまり $a, b \in \mathbb{Z}$ で $[a:b:1]$ と書ける点とする．A，あるいは $\phi^{(n)}$ の指数行列の全ての成分が非負の場合，整数点から始めるとまた整数点に戻ってくるので，軌道の整数点は自動的に無限個となる．第一の結果は，多重合成がこのような「多項式型」になりうる可能性についてである．

定理. ϕ が $\mathbb{P}^2$ 上の単項式写像で，$\phi^{(n)}$ が多項式となる n が存在するならば，最初のこのような n は $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ のいずれかである．

$\mathbb{P}^1$ 上の射の場合は，2重合成が多項式にならない限り，n 重合成も多項式にならないというシルバーマンの結果があり [3]，この定理はこれの射影平面単項式への拡張となっている．上の定理にあげられた回数で初めて多項式となる単項式写像も挙げた．

次の二つの定理が，第三章の論文の主結果の (a) と (b) にそれぞれ対応する．

定理. ϕ を $\mathbb{P}^2$ 上単項式写像とし，A をその指数行列とする．ϕ の軌道のうちの少なくとも一つは無限個からなるとする．全ての軌道が有限個しか整数点を含まないのは，次のいずれかの場合である：

(1) A に実数固有値 $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$ があり，$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ かつ $|\lambda_1| > 1$ かつ $(i - \lambda_1)j > 0$ の時．

(2) A に有理数固有値 λ_1, λ_2 があり，$|\lambda_1| > |\lambda_2|$ かつ $|\lambda_1| > 1$ かつ $(i - \lambda_1)j > 0$，さらに $|\lambda_2| \leq 1$ か $(i - \lambda_2)j > 0$ のどちらかを満たす時．

(3) A が対角化不可能で，唯一の固有値 λ が $|\lambda| > 1$ かつ $(i - \lambda)j > 0$ を満たす時．

(4) $m \geq 1$ に対し，$\phi = (x/y^m, y)$, $(y^m/x, 1/y)$, $(x, y/x^m)$，あるいは $(1/x, x^m/y)$ の時．

これら以外の場合 *(例えば A に複素固有値がある場合)* では，無限個の整数点を含む軌道が存在する．

定理. ϕ が上記の定理の (1)–(3) に属するとし，$P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) \backslash (XYZ=0)$ の軌道が無限集合だとする．$\phi^{(n)}(P)$ の x 座標と y 座標を既約分数で書いた時，N_n を分子の積，D_n を分母の積とする．このとき

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\max(\log|N_n|, \log|D_n|)}{\min(\log|N_n|, \log|D_n|)}$$

が存在し，正の数である．

単項式写像は射でないこと，また $(\phi^{(n)})^*(Z=0)$ は重複度が高い因子となり直交交叉でないことから，第三章の結果と違い，軌道の整数点の有限性は必ずしも保証されない．また，座標の大きさの比も1に収束するとは限らず，A の成分と P の座標から容易に計算はできるものの，様々な正の数になり得る．このように，第三章の直接的な例にはならないが，行列の冪乗計算に帰着できることから，力学系的考察ができる．証明には円分体理論や線形代数のペロンの定理なども使われている．

尚，この要旨の詳細，及びネヴァンリンナ理論やボイタ予想の背景を第一章で言及している．

謝辞 今回の論文執筆にあたり，主査の野口潤次郎氏には沢山の助言を頂きました．ここに感謝の意を表します．

References

[1] Pietro Corvàja and Umberto Zannier, *A lower bound for the height of a rational function at S-unit points*, Monatsh. Math. **144** (2005), no. 3, 203–224.

[2] Aryeh Gregor and Yu Yasufuku, *Monomial maps on $\mathbb{P}^2$ and their arithmetic dynamics*, to appear in J. Number Theory.

[3] Joseph H. Silverman, *Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 3, 793–829.

[4] Paul Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1239, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[5] ______, *On the ABC conjecture and Diophantine approximation by rational points*, Amer. J. Math. **122** (2000), no. 4, 843–872.

[6] Yu Yasufuku, *Integral points and Vojta's conjecture on rational surfaces*, to appear in Tran. Amer. Math. Soc.

[7] ______, *Vojta's conjecture on blowups of $\mathbb{P}^n$, greatest common divisors, and the abc conjecture*, Monatsh. Math. **163** (2011), no. 2, 237–247.