

## 論文審査の結果の要旨

氏名 安福 悠

この論文では、複素解析学の一分野である値分布理論（ネヴァンリンナ理論）に源泉を持つ、ディオファントス幾何の重要な予想のひとつである“ヴォイタ予想”に関連する研究が行われている。研究成果として、射影平面のプロローアップ上や射影空間上で主に3つの結果が得られている。

第1章では、ネヴァンリンナ理論とヴォイタ予想について論じている。前者に現れる色々な量が、ディオファントス近似・幾何学に現れる諸量とどのように対比・関連付けられヴォイタ予想が定式化されるかが述べられている。その内で、中心的役割を果たすのがネヴァンリンナ理論に於ける第二主要定理と呼ばれる評価式である。この評価式がディオファントス近似論に於けるロスの定理に類似することは、既にC.F. オスグードにより述べられていたところであったが、P. ヴォイタはこれを更に完成させる形でネヴァンリンナ理論の概念と整数論の概念を結びつけるいわば辞書を作り出した。本論文の第1章で詳しく解説しているように、例えば有理型関数は無限個の有理数に、接近関数は局所高さの有限和に、位数関数は高さ関数に対応する。この辞書を使うと、第二主要定理の誤差項を少し弱めたものが丁度ロスの定理に翻訳されることが分かる。そこでP. ヴォイタは、ネヴァンリンナ理論の第二主要定理の一般化・高次元化の試みであるグリフィス予想を、彼の辞書を使ってディオファントス近似に翻訳した。これがヴォイタ予想で、以下に述べる研究成果の動機付けとなっている。

第2章ではある特殊な代数多様体とその上の因子に関するヴォイタ予想が $abc$ 予想のある特別な場合を含むことを示すものである。得られた結果は、

「射影平面上の三角形を  $D$ 、 $D$  の边上の点で射影平面をプロローアップしたものを  $X^{(1)}$ 、そのときの例外因子を  $E^{(1)}$  とする。 $E^{(1)}$  のある点でもう一度プロローアップしたものを  $X^{(2)}$ 、そのときの例外因子を  $E^{(2)}$  とする。このとき  $X^{(2)}$  上の因子  $\tilde{D} + \widetilde{E^{(1)}} + E^{(2)}$  に対するヴォイタ予想から  $a$  を  $S$ -unit、 $b = 1 - a$ 、 $c = 1$  としたときの  $abc$  予想の主張する不等式が導かれる。」

一般にヴォイタ予想は強い予想であり、色々な主張がこの予想から導かれることは知られている。しかし今の場合、プロローアップしたあとの対象物については数論的な情報が崩れてしまい、統制が難しいという現実がある。申請者は特殊な有理曲面の場合のヴォイタ予想を仮定しているが、相当に仮定を弱め、その上で  $abc$  予想の不等式と同じ指数という強い評価を得ている事は特筆に値する。一方、見方によってはこのような単純な多様体についてのヴォイタ予想から、特別な場合とは言え  $abc$  予想が導かれることは興味深い発見である。 $abc$  予想は次の様に述べられる。

「任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、 $\varepsilon > 0$  にのみ依存する正定数  $C(\varepsilon)$  が存在して、 $a+b=c$  を満たす互いに素な任意の整数  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  に対して  $\max\{|a|, |b|, |c|\} < C(\varepsilon) \cdot (\prod_{p|abc} p)^{1+\varepsilon}$  が成立する。但し  $p$  は素数とする。」

$abc$  予想は現状において一般的状況下では、予想されている評価の、指数的オーダーの評価という弱い部分的結果しか得られていない。

第3章と第4章では算術的（或いは数論的）力学系 (Arithmetic Dynamics) の問題を扱っている。まず第3章では、J. シルバーマン等によって考察された  $\mathbb{P}^1$  上の限定的な結果を、一般次元の場合に拡張するにはどのような十分条件を設定すれば良いのかを問う一つの考察が行われている。代数多様体の自己写像  $\varphi$  の  $n (\in \mathbb{N})$  回反復合成  $\varphi^{(n)}$  により反復力学系が定義され、それによる有理点の軌道を調べる。無限個の  $n$  について、 $\varphi^{(n)}$  による超平面因子の引き戻しが正規交叉となり、ある有理点軌道の任意の無限部分集合がザリスキー稠密、つまり代数退化する無限部分集合が存在しないという非退化条件の下で、更にヴォイタ予想を仮定するとき、軌道座標のある比の極限が値 1 を持つことを示した。

代数多様体上の自己写像の反復合成により生成される力学系という、算術的（数論的）幾何学の興味深い対象と、一見それと離れて見えるヴォイタ予想との関係を調べるということが新しく提起された視点である。J. シルバーマンは、彼の定理を得るのにディオファントス近似の古典的結果であるロスの定理に依った。申請者は、この部分をヴォイタ予想に置き換えて高次元化を計ったことになる。代数多様体上の自己写像の合成を考察することは、多くの数論的な問題を統一的に包括するばかりでなく、多方面への関連する研究を促すものである。本結果は、ヴォイタ予想を仮定するものながら、これからの数論の新しい方向性を期待させるものである。

第4章では第3章の主結果において仮定したヴォイタ予想を仮定することなく、ある具体的な特別な場合に対応する結果を証明したものが主定理である。このような具体例は他になく、得られた二つの定理は簡潔で美しくまとまっている。

補足ながら、申請者の過去のブラウン大学での PhD 論文との重複がないことも確認した。

以上要するに、本論文では算術的（数論的）幾何学の重要な未解決問題であるヴォイタ予想に関連して、色々な方向から考察を加え興味深い結果を導いている。よって、論文提出者 安福 悠 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。