

論文の内容の要旨

論文題目

非一様な一次元非線形シュレーディンガー系における
無反射流 および 線形化励起の透過特性の解析的研究

氏名

高橋 大介

本博士論文では、一次元非線形 Schrödinger (Nonlinear Schrödinger, NLS) 系における、ポテンシャル障壁に対する無反射な超流動解 (超伝導系の Josephson 効果に倣い、Josephson 超流動解と呼ぶ) や、線形化励起 (Bogoliubov 励起, Bogoliubov フォノンとも呼ぶ) の透過特性、そしてこれらの物理現象に見られる臨界現象やスケールリング則に関する、主に解析的計算によって得られた理論的結果を報告する。NLS 系は、可積分系、力学系、量子多体系、特に Bose-Einstein 凝縮体 (BEC)、超伝導体や磁性体の Ginzburg-Landau 理論、非線形光学など、実験物理と理論物理の両面で多種多様な適用例を持っており、研究の歴史は非常に深く長い。系の基礎方程式が一般化された形 (例えば多成分系となる、非線形項が高次になる等) で現れることも多くあり、これらの拡張された系の研究は、一成分かつ三乗の非線形項を持つ最も基本的な NLS 系ほどは進んでいない。また、特に力学系として見た場合の分岐現象やそれに伴うスケールリング則は、比較的単純な設定の系ですら、数値実験による観測は多くあれど、解析的な証明に関しては未解決であるものが多い。それは、NLS 系を数学的に扱うことの難しさによるものである。本博士論文では、これらの問題に対していくつかの数理的理解を提示する。

論文はイントロダクションである第 1 章、先行研究と基礎理論のレビューを行う第 2 章と第 3 章、筆者本人によるオリジナルな研究結果を報告する第 4 章から第 7 章、そして全体のまとめとなる第 8 章によって構成されている。以下に各章の概要を述べる。

第 1 章はイントロダクションであり、本博士論文の研究の背景となる NLS 系の理論的および実験的な先行研究について概観する。特に理論的側面としては、古典可積分系としてソリトンの理解で重要な役割を果たしてきたこと、力学系として分岐現象やスケールリング則の理解に貢献してきたことを紹介し、また実験的側面としては、1995 年に冷却原子気体系で実現された BEC およびこの系の制御性の高さについて紹介する。

第 2 章は本論文で解析する方程式系の基礎理論に関する概説である。特に、本論文の解析で中心的役割を果たす Bogoliubov 方程式については、古典波動の線形化方程式としての側面、量子系

の(平均場理論によって導かれる)近似的な励起状態としての側面の両方について導出・解説を行う。また、近年冷却原子気体系で活発に研究が行われているスピン自由度を持つ BEC(スピノル BEC)の平均場理論およびその線形化励起についてもレビューする。なお、このスピノル BEC のレビューの中には、スピン-2 の BEC から作られるスカラー量が満たす不等式など、オリジナルな結果も一部含まれている。

第3章では、本論文と最も関連の深い先行研究である、ポテンシャル障壁の存在する NLS 系における Josephson 超流動解の構築、Bogoliubov フォノンのトンネリング問題の結果(特にゼロエネルギーのフォノンが示す異常トンネリング)、そして、これらの物理の背後にあるスケーリング則、そしてその起源である、NLS 系の示す力学系としての分岐現象について、筆者自身の仕事も交えつつ、レビューする。また、Bogoliubov フォノンのトンネリング問題を解く時に威力を発揮する二乗 Jost 解を用いた解法についても述べる。

以降の章はオリジナルな研究結果であり、本論文の主要部分をなす。

第4章では、ポテンシャルステップ差のある NLS 系において、Josephson 超流動解が存在することを実際に解を構成することで示す。さらに、この状態のもとで Bogoliubov フォノンのトンネリング問題を解き、透過係数はゼロエネルギーにおいて部分透過となることを示す。これは、ゼロエネルギーの Bogoliubov フォノンが、必ずしも Bose 凝縮体の超流動性を受け継ぐわけではないという一つの重要な反例を与えており、特にいくつかの先行研究に見られた、両者を混同した物理的考察に対して警鐘を鳴らしている。

第5章では、非線形項を一般化した NLS 系において、ダークソリトンとフォノンの散乱問題を解析的に解く。そして、ソリトンが不安定化する臨界速度状態において、ゼロエネルギーのフォノンの反射係数が特異的になること、および、臨界速度状態の近傍においては、反射係数がサドルノード分岐を示す力学系で普遍的に見られるスケーリング則に従うことを証明する。また、これらの解析的結果の正当性を、三乗・五乗 NLS (cubic-quintic NLS, CQNLS) 系における数値シミュレーションによって確かめる。本章の結果は、(a) 結果の一般性(非線形項の具体形に依らない)、(b) 証明の技術の開発(複数のパラメータ微分の差を取ることに依るゼロエネルギー解の構成)、(c) 分岐現象に由来するスケーリング則の厳密な導出、等々の点から、本博士論文で得られた結果の中でも特に価値が高いと考える。

第6章では、1成分 BEC の場合の二乗 Jost 解の方法を拡張することで、可積分なスピノル BEC 系における Bogoliubov 方程式の解法を与える。具体例として、可積分なスピン-1 の BEC のダークソリトン解に対する Bogoliubov 方程式の解を与える。

第7章では、スピン-1 BEC 系において、スピノル BEC が持つ基本的な対称性をヒントに、定常解の定義を拡張し、この新たな定常解の範囲で、線形安定性を満たすようなスピン波解が存在することを証明する。更に、話を可積分点に限定して、ポテンシャル障壁に対して無反射なスピンの Josephson 超流動解を構築し、多位相へと拡張された Josephson 関係式を提唱する。また副産物として、このスピン波解のもとでは、通常の対称性の破れの議論からは説明の付かないギャップレスモードが出現することも示す。

第8章は全体のまとめであり、得られた研究結果の意義と今後の展望を述べる。