論文の内容の要旨

論文題目: The variational formulation of the fully parabolic Keller-Segel system with degenerate diffusion
(退化拡散項を持つ完全放物型 Keller-Segel 系に対する変分的定式化)

氏　　名: 三村　与士文

本論文では, 次の退化拡散項を持つ放物型偏微分方程式系の時間大域解について考察した.

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla \cdot (\nabla u^m - \chi u \nabla v) & \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ \varepsilon \partial_t v = \Delta v - \gamma v + \alpha u & \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \\ \varepsilon v(x,0) = \varepsilon v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^d$ の滑らかな境界を持つ有界領域であり, $\alpha, \varepsilon, \chi$ は正定数, γ は非負定数である. 本論文では, $m \geq 2 - \frac{d}{2}$, $d > 2$ の場合を次の境界条件の下で考察する.

$$\frac{\partial u^m}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \chi u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,\ t > 0.$$

この方程式は, ある種の化学物質に誘引される性質（走化性) を持つ微生物の集合体形成を記述したモデルとして, Keller と Segel によって提唱された [10]. (1) の第一式を積分すればわかるように, u の L^1 ノルムは時間に依存しない, すなわち質量保存則が成り立つことに注意する.

もともとの Keller-Segel 系は空間次元 $d = 2$ であり, 初期の研究においては, $d = 2, m = 1$ の場合が盛んに研究され, 次に述べるような質量の閾値 $M_c > 0$ の存在が示された [4, 5, 6, 11].

> $0 < \|u_0\|_{L^1} \leq M_c$ ならば, (1) の解は時間大域的に存在する. 他方, 任意の $M > M_c$ に対し, $\|u_0\|_{L^1} = M$ を満たし, 有限時間で爆発するような解が存在する.

$d > 2$ の高次元の問題においては, $m = 2 - \frac{d}{2}$ の場合にのみ上と同様の閾値が存在することが知られており, この値 $m = 2 - \frac{2}{d}$ が, (1) における

臨界指数である．実際, Blanchet-Carrillo-Laurençot [3] は, この場合に, $\varepsilon = \gamma = 0$ の付加条件のもと, 上記の閾値 M_c の存在を示した．後で述べるように, この臨界指数は (1) の Lyapunov 汎関数と密接な関係がある．また, 閾値の存在は明らかにされていないが, 臨界指数 $m = 2 - \frac{2}{d}$ の場合の時間大域解と爆発解を扱った先駆的な結果として, 杉山氏の論文 [12] がある．

$\varepsilon = 0$ のとき, (1) の第 2 式は楕円型の方程式となるので, (1) は, いわゆる放物-楕円系となる．Keller と Segel が提唱したのは放物-放物系 (完全放物型) であるが, 放物-楕円系の方が解析がやり易いため, これまでの研究は, 放物-楕円系に関するものが多い．これに比べて放物-放物系に関する研究結果は, まだ少ないのが現状である．

本論文では, 本来の Keller-Segel 系である $\varepsilon > 0$ の場合（放物-放物系）の時間大域解の存在を, $\gamma = 0$ の制約を外して考察する．(1) の Lyapunov 汎関数として知られる汎関数を用いて, (1) を勾配流として定式化することが本論文の特徴であり, このような定式化は $\varepsilon \neq 0$ の場合には初めての試みである．

本論文では, まず, $m = 2 - \frac{2}{d}$ のときに, Lyapunov 汎関数の下からの有界性に対し, 次の性質を持つ定数 M_* が存在することを示した．u の L^1-ノルムが M_* 以下であれば, 任意の v に対して Lyapunov 汎関数は下に有界であり, M_* より大きければ Lyapunov 汎関数が下に非有界となる．また, $m > 2 - \frac{2}{d}$ のときには, u の L^1-ノルムの大きさに関わらず Lyapunov 汎関数は常に下に有界であることも示した．

次に, Lyapunov 汎関数の下からの有界性が時間大域解の存在を保証することを示した．すなわち, $m = 2 - \frac{2}{d}$ のとき, $\|u_0\|_{L^1} < M_*$ をみたす任意の非負の初期値 $(u_0, v_0) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ に対して, (1) の時間大域的な弱解が存在することを証明した．また, $m > 2 - \frac{2}{d}$ のときには, u の L^1-ノルムの大きさに関わらず時間大域的弱解が存在することを示した．これらの結果を導く上で, (1) の勾配流としての定式化が本質的に重要な役割を演じている．

本論文と類似の完全放物系の時間大域解の存在を取り扱った論文として, 石田-横田 [7, 8] がある．[8] では, $\Omega = \mathbb{R}^d, d > 2, m \leq 2 - \frac{2}{d}$ のとき, u_0 の $L^{\frac{d}{2}}$-ノルム, $L^{\frac{d}{2}(2-m)}$-ノルムと Δv_0 の $L^{\frac{d}{2}+1}$-ノルム, $L^{\frac{d}{2}(2-m)+1}$-ノルムが十分小さいという仮定のもとで時間大域解の存在を示している．しかしながら, 本論文における $m = 2 - \frac{2}{d}$ の場合の結果は, Δv_0 の大きさに制約を設けていない点で, また, 放物-楕円系ですでに得られている閾値原理に準ずる形の時間大域解の存在結果を得た点で, 従来の結果と大きく異なっている．なお, $m > 2 - \frac{2}{d}$ のときは閾値現象は起こらず, 解は常に大域的になるが, 本論文のこの場合の結果は, 弱解の定義の差異などを除いて [7]

とほとんど同じであるものの, 証明において $m = 2 - \frac{2}{d}$ の場合と分ける必要がなく, 簡明である.

ところで, $m = 1, d = 2, \varepsilon = \gamma = 0$（放物-楕円系）の場合には, (1) の勾配流としての定式化は, Blanchet-Calvez-Carrillo [2] によって, すでに行われている. 放物-楕円系の場合, ラプラス作用素の基本解を用いて (1) の第 2 式を u について解き, 第 1 式に代入することにより, (1) は単独方程式に帰着されるが, [2] では, この方程式を Wasserstein 空間と呼ばれる確率測度の距離空間上の勾配流として特徴付けた. Wasserstein 距離を用いて質量保存則の成り立つ拡散方程式を変分的に取り扱う方法は, Jordan-Kinderlehrer-Otto [9] によって導入された. [2], [9] の手法は, 互いに細かい点で微妙に異なるものの, 通常の関数空間においては変分構造を持たない方程式を Wasserstein 空間上の勾配流として特徴付けることにより変分的アプローチを可能にしている点で共通している. どちらの方法も方程式を時間離散近似し, 各時間ステップごとに最小化問題を解いて次のステップの値を決め, こうして得られた離散近似解の収束を議論するというやり方を採用している. なお, Ambrosio-Gigli-Savaré [1] は, 距離空間の勾配流として抽象的な枠組みで, この時間離散近似法の理論をまとめ, Wasserstein 空間においても勾配流の一般論を発展させた.

本論文で考えている完全放物系は, [2] のように単独の勾配流方程式には帰着できないが, 形式的には, (1) の Lyapunov 汎関数を用いて, 第 1 式については Wasserstein 空間での勾配流, 第 2 式については L^2-空間での勾配流として考えることができる. したがって, (1) は Wasserstein 空間と L^2-空間の直積空間での勾配流と見なせる. このことから, 一見すると, Wasserstein 空間と L^2-空間の直積空間を考え, [1] によって発展させられた距離空間の勾配流の一般論が適用できるように思われる.

しかしながら, (1) の Lyapunov 汎関数は, [1] の枠組みには含まれず, 直積空間での勾配流として時間離散近似法を適用しようとすると, 劣微分の存在が問題となる. 本論文では, この問題を解決するために, 各時間ステップごとに, Wasserstein 空間での最小化問題と L^2-空間での最小化問題とを交互に解くことで次のステップの値を定める方法を採用した. これにより, 初期値 u_0, v_0 の正則性を, 各時間ステップの値に伝搬させることができ, 劣微分の存在の問題を解決することができた.

近年研究が盛んに行われている Wasserstein 空間の勾配流の理論と通常の L^2-空間の勾配流の理論を合わせ, それらを連立方程式系に応用した点で本論文の方法は新しい. また, 本論文で得られた Lyapunov 汎関数の下からの有界性に関する閾値 M_* は, [3] が $\varepsilon = \gamma = 0$ の場合に与えた閾値 M_c（すなわち大域存在と爆発を隔てる閾値）と等しいこともわかっている. よって, $\varepsilon > 0$（すなわち放物-放物系）の場合にも後者の意味で M_* が

閾値であることが期待できる. これを厳密に示すためには, 放物-放物系において, $M > M_*$ を満たす任意の M に対して, $\|u_0\|_{L^1} = M$ を満たす爆発解の存在を示す必要があるが, 現在のところ, 放物-放物系においては, 多くの研究者の努力にも関わらず, 爆発解の例はまだ見つかっていない. しかしながら, 本論文の結果により, 閾値問題の解決に向けて大きく前進したと考えている.

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics, Birkhäuser, (2005)

[2] A. Blanchet, V. Calvez, and J. A. Carrillo, *Convergence of the mass-transport steepest descent scheme for the subcritical Patlak-Keller-Segel model*, SIAM J. Numer. Anal. 46 (2008), pp.691-721.

[3] A. Blanchet, J. A. Carrillo, and PH.Laurençot, *Critical mass for a Patlak-Keller-Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions*, Calc. Var. Partial Differential Equations 35 (2009), pp.133-168.

[4] H. Gajewski and K. Zacharias, *Global behavior of a reaction-diffusion system modelling chemotaxis*, Math. Nachr. 195 (1998), 77-114

[5] M. A. Herrero and Velázquez, *Chemotaxis collapse for Keller-Segel model*, J. Math. Biol. 35 (1996), 177-194

[6] M. A. Herrero and Velázquez, *Singularity patterns in a chemotaxis model*, Math. Ann. 306 (1996), 583-623.

[7] S. Ishida and T. Yokota, *Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type*, J. Differential Equations 252 (2012) 1421-1440.

[8] S. Ishida and T. Yokota *Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type with small data*, J. Differential Equations 252 (2012) 2469-2491.

[9] R. Jordan, D. Kinderlehrer and F. Otto, *The variational formulation of the Fokker-Planck equation*, SIAM J. Math. Anal. 29 (1998) 1-17 (electronic).

[10] E. F. Keller and L. A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol. 26 (1970), 399-415

[11] T.Nagai, T.Senba and K.Yoshida, *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funckcial. Ekvac. 40 (1997), 411-433

[12] Y. Sugiyama, *Application of the best constant of the Sobolev inequality to degenerate Keller-Segel models* Adv. Differential Equations 12(2007), pp. 121-144.