論文審査の結果の要旨

氏 名　三村 与士文

論文提出者 三村 与士文 は，次の退化拡散項を持つ放物型偏微分方程式系の時間大域解について考察した．

$$
(1)\qquad \begin{cases} \partial_t u = \nabla\cdot(\nabla u^m - \chi u \nabla v) & \text{in } \Omega,\ t>0, \\ \varepsilon\partial_t v = \Delta v - \gamma v + \alpha u & \text{in } \Omega,\ t>0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x\in\Omega, \\ \varepsilon v(x,0) = \varepsilon v_0(x) \geq 0, & x\in\Omega. \end{cases}
$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^d$ $(d>2)$ 内の滑らかな境界を持つ有界領域であり, $\alpha, \varepsilon, \chi$ は正定数, γ は非負定数である．また，$m \geq 2 - \frac{d}{2}$ を仮定する．境界条件は次のものを考える．

$$
\frac{\partial u^m}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \chi u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,\ t>0.
$$

この方程式は, ある種の化学物質に誘引される性質（走化性) を持つ微生物の集合体形成を記述したモデルとして Keller と Segel が 1970 年に提唱したもので，数学的に興味深い性質をもつことから，多くの研究がなされてきた．方程式と境界条件の形から容易にわかるように，u の総質量 $\int_\Omega u\,dx$ は保存量である．

もともとの Keller-Segel 系は空間次元が $d=2$ で $m=1$ の場合であり，初期の研究においては, この場合が盛んに研究された．この場合は，解の爆発を生じさせる質量の閾値 $M_c>0$ の存在が Herrero-Velázquez (1996,1998), Nagai-Senba-Yoshida (1997), Gajewski-Zacharias (1998) らによって示され， その後も多くの関連研究がなされている．ここで， M_c が「質量の閾値」であるとは，次の性質が成り立つことを意味する．

> $0<\|u_0\|_{L^1}<M_c$ ならば, (1) の解は時間大域的に存在する．他方, 任意の $M>M_c$ に対し, $\|u_0\|_{L^1}=M$ を満たし, 有限時間で爆発するような解が存在する．

他方, $d>2$ の高次元の問題においては, $\varepsilon=\gamma=0, m=2-\frac{d}{2}$ の場合に同様の閾値が存在することが, Blanchet-Carrillo-Laurençot (2009) によって示された．しかしながら, Keller-Segel が提唱したもともとのモデルは放物-放物系（すなわち $\varepsilon>0$ の場合）であるにも関わらず, この場合の結果はほとんど知られていなかった．石田-横田 (2012) は, まだほとんど着手されていなかったこの場合を扱った．ただ，彼ら

の結果においては，時間大域解の存在を u_0 および Δv_0 の大きさに制限を課して示すにとどまっている．

これに対し，本提出論文では，次の結果を得た．

(i) 与えられた方程式系の勾配流としての定式化

(ii) 閾値の候補 M_* の決定

(iii) $\int_\Omega u_0\,dx < M_*$ という最適条件の下での時間大域解の存在の証明

論文提出者は, 近年偏微分方程式への応用が盛んに研究されている Wasserstein 距離と呼ばれる確率測度空間上の距離を用いて, (1) が勾配流の構造を持っていることを示した．このような勾配流としての定式化とアプローチは, $m = 1, d = 2, \varepsilon = \gamma = 0$ の場合には, Blanchet-Calvez-Carrillo (2008) よってなされていたが, より複雑な方程式系である $\varepsilon > 0$ の場合に対しては初めての試みである．

勾配流としての定式化を用いて, 論文提出者は, (1) のエネルギー汎関数として知られる汎関数から, 閾値の候補 M_* を決定した．この閾値の候補 M_* は, Blanchet-Carrillo-Laurençot (2009) が $\varepsilon = 0$ の場合（放物-楕円系）に示した閾値 M_c と等しいことも示されており，放物-放物系である (1) の閾値として十分に期待できる値である．

次に論文提出者は, 勾配流としての定式化に基づいて, (1) を時間離散化した近似方程式を変分的手法でを定義し，$\int_\Omega u_0 < M_*$ のときに, この近似方程式が時間大域解を持つことを示すとともに，この近似大域解が，時間の刻み幅をゼロに近づけたときに元の方程式の時間大域解に収束することを示した．従来の時間離散化の方法をでは，得られる近似解が (1) の解に収束するために必要な評価を導くのが困難であったが，論文提出者は巧妙な時間離散化の方法を考案し，これにより，必要な評価が容易に得られて，$\int_\Omega u_0 < M_*$ という最良の条件下で時間大域解の存在を示すことができた．

また, 副次的結果ではあるが, 提出者は, $m > 2 - \frac{2}{d}$ の場合も考察の対象としており, この場合には, $M_* = \infty$ と見なせることから，(1) の解が任意の初期値に対して時間大域的に存在することが自動的に従う．これは，石田-横田 (2012) の結果の別証明を与えるものであるが，$m > 2 - \frac{2}{d}$ の場合と $m = 2 - \frac{2}{d}$ の場合が統一的に扱うことができたのも，提出論文の著しい特徴の一つである．

提出論文は，Keller-Segel 系に関する未解決問題の一つを解決しただけでなく，そこで用いられている手法も極めて斬新なものである．以上の諸点を考慮した結果, 論文提出者 三村 与士文 は，博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める．