

## 論文の内容の要旨

論文題目 Essays on Derivatives Pricing

(金融派生商品の価格評価に関する研究)

氏 名 白谷 健一郎

金融機関において扱うデリバティブ商品は多岐に渡り、その評価を高速かつ正確に行うことは重要な問題となっている。特にエキゾチック商品や長期のデリバティブといった取引は、その価格を推定すること自体が容易ではなく、高流動のプレーンな商品と整合的になるように評価をするために複雑なモデルを必要とする。本論文はそのようなデリバティブの価格を高速かつ正確に評価するための手法と、その精度について数値検証等を通じ分析することで金融実務での活用を念頭においた金融技術に関する研究成果をまとめたものである。

第一部では最初に長期の原油先物・先渡し価格を最大 3 ファクターの状態変数モデルを用いて推定し、実際の市場データを用いて検証を行った。

近年コモディティのデリバティブ市場は急拡大しており、金融機関のみならず商社、電力会社、ガス会社等の事業会社も市場に参入している。短期でプレーンな商品については取引所から価格が取得できるため価格の推定は容易であるが、OTC の市場では長期の先渡し取引や、平均オプションが主流であり、価格を推定することは容易ではない。長期の先渡し取引においては、Gibson and Schwartz (1990)により現物価格の変動以外にコンビニエンス・イールドを確率過程としたモデル、Schwartz (1997)ではコンビニエンス・イールドと金利を確率過程として明示的に取り入れたモデルが提案された。一方、商品の現物価格、コンビニエンス・イールド、金利を個別にモデル化するのではなく、現物価格を平均回帰する状態変数を用いて直接モデル化する方法も提案された。Schwartz and Smith (2000)では 2 ファクター平均回帰モデル、Casassus and Dufresne (2005)は 3 ファクター平均回帰モデル、Cortazar and Naranjyo (2006)はNファクター平均回帰モデルにより、直接現物価格をモデル化している。

長期の先物・先渡し取引に対するヘッジとしては Korn (2005)等で検討されている。しかし、近年の急激なコモディティの価格やフォワード・カーブの変動が起こった時期においては、長期の契約に対して適用可能かどうかについて研究がなされていない。

本研究では **stochastic mean-reversion** を用いた 3 ファクター・モデルを構築するとともに、商品先物・先渡し価格の解析解を導出した。モデルには平均回帰水準を固定するタイプと固定しないタイプの 2 種類を用い、原油(NYMEX WTI)及び銅(LME Copper)の商品先物価格を推定し、実際に取引可能な先物価格に対する高い再現性を有することを示した。更に長期の先物・先渡しに対し、モデルに基づき適切なヘッジ・ポートフォリオを組むことにより、効率的なヘッジが達成できることを実証及びシミュレーションにより示した。

次に、コモディティの OTC 市場で一般に取引されている平均オプションについて、連続平均、離散平均のそれぞれの場合のオプション価格の近似式を示す。平均オプションについては多くの先行研究が行われているが、その多くは **Black-Scholes** モデルをベースとしたものであり、ボラティリティ・スマイルの要因を入れることができない。スマイルの影響を加味したモデルではモンテカルロ法での計算が一般的となるが、計算時間が問題となる。Fouque and Han (2003)等では特殊な確率ボラティリティ・モデルの解析近似解について研究されているが、現実のコモディティ市場で通用するモデルとは言えない。実務で用いられる平均オプションは連続平均型ではなく、日次で平均をとる離散平均型であり、平均の参照期間中に先物の限月交代が行われるが、ほとんどの平均オプションの研究においてこの点が加味されていない。

本研究ではコモディティ市場で主流となっている平均オプションの価格評価に関し、2つの(局所)確率ボラティリティ・モデルの下で漸近展開を用いた近似評価式を導出した。また、NYMEX で取引されているプレーンな先物オプションを用いてカリブレーションを行い、平均オプションの価格の数値計算を行うとともに、どのようなモデルがコモディティ市場に適しているかについても言及した。実務で用いる平均オプションは月の途中で先物の限月交代があるため、実際にはバスケット離散平均オプションとなるが、局所確率ボラティリティ・モデルを用いたこのタイプのオプションの解析近似解は筆者の知る限り本研究が初めてと思われる。

更に、実務において重要でありながら非常に複雑な、原資産の建値通貨と参照価格算出の際の通貨が異なり、複数資産を参照するタイプのオプションに対する解析近似式を導出し、数値検証によりその精度を分析した。このタイプのオプションは特に日本の事業会社が原料の輸入価格をヘッジする際によく用いるオプションであり、その複雑さからボラティリティ・スマイルと為替の変動

との相関まで考慮したオプションの解析近似解は得られていなかった。

本研究ではこのオプションの解析近似解を導出し、実務上十分な精度で近似できることを数値検証により示した。更に局所確率ボラティリティ・モデルにおけるバスケット・オプションについても解析近似解を導出した。これまで局所確率ボラティリティ・モデルでのバスケット・オプションの近似は数資産程度でしか得られていなかったが、本研究では 100 資産 200 ファクターのバスケット・オプション価格を高速、高精度に近似できることも示した。

最後に、近年特に注目されているカウンターパーティーの倒産リスクを織り込んだデリバティブの価格評価について分析した。金融機関では CVA 等を通じ倒産リスクを管理しているが、担保資産の有無や種類によって管理すべきリスクは変わるため、従来の CVA の計算手法では把握できないリスクを内在している。

本研究では現実に近いパラメータを用い、コモディティ・デリバティブにおけるカウンターパーティー・リスクも考慮した評価に重要なファクターが何であるかを、数値検証を通じ分析した。

第二部では LIBOR Market Model (LMM) に局所確率ボラティリティ・モデルを組み合わせた新しい金利モデルを提案し、Cap, Floor, Swaption の統合的な価格評価を行った。

金利デリバティブについては、1970 年代以降、瞬間的な金利の変動の記述に確率微分方程式を適用したスポット・レート・モデル が提案された (Cox, Ingersoll and Ross (1985) 等)。しかし、スポット・レートは市場で直接観測できず、モデルで使用する固有のパラメータの設定が困難であるとともに、フォワード・カーブが厳密に再現できない等の問題があり、実務において使い易いわけではなかった。その後、Heath, Jarrow and Morton (1992) により未来の時刻における金利の変動を考えるフォワード・レート・モデルが提案された。しかし、このモデルもパラメータの推定に関する問題は残った。Brace, Gatarek and Musiela (1997) 等により LIBOR Market Model (LMM) が提唱され、金利市場において標準的なモデルとなった。しかし、LMM ではボラティリティ・スマイルの構造が入っていないため、異なった行使価格におけるオプション価格を再現することができなかった。近年、LMM に(局所)確率ボラティリティ・モデルを導入することでボラティリティ・スマイルを再現するモデルが提唱された。例えば Wu and Zhang (2006) では Heston 型の確率ボラティリティを導入し、Hagan and Lesniewski (2008) 等では SABR 型の局所確率ボラティリティ・モデルが導入された。しかし、単なる Heston 型のボラティリティ・モデルでは実際の金利市場のスマイルを表現するには十分ではなく、SABR 型のボラティリ

ティ・モデルでは一部の近似に強引な部分が残る。

本研究では局所確率ボラティリティ・モデルとして中心回帰性を持つ確率ボラティリティに局所ボラティリティを組み合わせたモデルを考案し、このモデルに対し、ドリフト固定化の手法を用いることで **Cap, Floor** だけでなく、それらと(近似として)整合的な **Swaption** の価格を同一の価格近似式で算出する方法を示した。例として **Heston** 型の確率ボラティリティに、**CEV** 型と **Quadratic** 型の局所ボラティリティ・モデルを用いた場合の **Swaption** の価格公式を導出した。また、実際のデータを用いてカリブレーションを行うことで、これらモデルが現実の市場に適合していることを検証するとともに、近似精度についても数値検証を行い、実務上十分な精度で近似できることを示した。

第三部では主に為替市場で取引されているバリア系オプションについて準解析近似解を与えた。特にインター・バンク市場で取引の行われる連続バリア・オプションと、カスタマー市場で扱いの多い離散バリア・オプションの 2 種類について考察した。

これらバリア・オプションは、**Black-Scholes** モデルにおいては簡単な解析解が存在する一方、為替市場には一般にボラティリティ・スマイルが存在するため、それらの影響を織り込んで価格付けをする場合、難しい問題となる。特に連続バリア・オプションの近似にモンテカルロ法を用いる場合には、離散化する際の時間間隔が非常に重要となり、荒く分割した場合には大きな誤差が生じてしまう。また、離散バリア・オプションであっても、モンテカルロ法では計算に時間を要し、**Greeks** の計算も容易とは言えない。

本研究では(局所)確率ボラティリティ・モデルを用い、最初に連続バリア・オプションの近似方法を示した。これまで解析近似解が存在しない場合には準解析的にも連続バリア・オプションの解を近似することができなかったが、ここでは漸近展開の手法をスタティック・ヘッジの手法と組み合わせることで、一般の **Markov** 型の確率過程に従う原資産に対する連続バリア・オプションの価格導出方法を示した。数値例では **Takahashi, Takehara and Toda (2010)** の 5 次の展開を用いた連続バリア・オプション、また、後半では **Shiraya, Tkahashi and Yamada (2012)** で計算された、2 次の漸近展開による離散バリア・オプションの近似精度について分析を行った。

以上