論文内容の要旨

論文題目

$W_{1+\infty}$ symmetry in 4D N=2 supersymmetric gauge theories

(4 次元 N=2 超対称ゲージ理論における $W_{1+\infty}$ 対称性)

菅野 正一

N=2 超対称ゲージ理論は 1994 年の Seiberg と Witten による低エネルギー有効理論の厳密解の決定で大きな注目を集めて以来、多くの研究者によって精力的に研究されてきた。その中に、Witten による M 理論からの N=2 超対称ゲージ理論構成や、Nekrasov によるオメガ背景下で経路積分を厳密に求めた Nekrasov 分配関数の導出があり、これらの研究自身もその後の研究に大きな影響を与えたものであった。

近年、この 2 つの研究をより強く結びつける発見がなされた。まず Gaiotto によって Witten による構成の再解釈がなされ、4 次元 N=2 超対称ゲージ理論を複数枚の M5 ブレーンを穴の開いたリーマン面に巻きつけた理論の低エネルギー有効理論として捉える見方が提示された。これによりゲージ理論の様々な性質がこの穴の開いたリーマン面の幾何学で理解することが可能になった。特に S-duality と言われる強弱双対性がリーマン面のパンツ分解という極めて明快な描像で記述できることが明らかになった。この構成は Wilson loop を含んだ場合や新しい Seiberg duality の構成、巻きつける空間を 3 次元にした場合の 3 次元超対称ゲージ理論の構成など様々な応用がなされた。この 4 次元理論とリーマン面との関係は、Alday、Gaiotto、Tachikawa によって更に深められた。彼らは、4 次元 N=2 超共形 SU(2) ゲージ理論の Nekrasov 分配関数とそれを記述する穴の開いたリーマン面上の Liouville 理論という 2 次元共形場理論の相関関数が一致するという予想 (AGT 対応) を提唱した。またその後、Wyllard により SU(N) ゲージ理論の場合に拡張された (AGT-W 対応)。この場合、対応する 2 次元共形場理論は A_{N-1} 型 Toda 理論となる。この予想は大きな注目を集め、様々な検証がなされ loop 演算子や surface 演算を含んだ場合やゲージ理論が漸近的自由な場合、行列模型のと関係や 5 次元ゲージ理論の場合などの拡張がなされた。AGT 対応が注目を集めた要因は、超弦理論や M 理論の立場でみると、未だに謎の多い M5 ブレーンの物理と深い関係があると期待されていたからである。一方、数理物理学的な観点から興味深い点は、一見全く異なる数学的起源を持つ量を結びつけていることにある。Nekrasov 分配関数はゲージ理論のインスタントンモジュライ空間の幾何学と密接な関係を持つ一方で、2 次元共形場理論の相関関数は Virasoro 代数または W_N 代数といった無限次元代数の表現論に深く関わるものである。

AGT 対応の検証や構造の理解、証明において困難な点は、W_N 代数が Virasoro 代数を

除いて非線形な代数で表現空間の構造の理解や相関関数の計算が非常難しいことにある。また、Nekrasov 分配関数は U(N) ゲージ理論に対して与えられているため、相関関数と比較する際に U(1) ゲージ場の寄与を適切に除く必要がある。これを U(1) 因子といい、限られた場合を除き一般的なクイバーゲージ理論に対して、U(1) 因子を決定する方法も明らかになっていない。

このような問題に対して重要なステップは Nekrasov 分配関数が各インスタントンごとの寄与の和になっており更にそれぞれがゲージ理論にある多重項ごとの寄与の積で与えられるという非常に factoraize した形をしていることを共形場理論の立場から理解することにある。これは、相関関数を三点関数の積に展開する基底として Nekrasov 分配関数の形を直接再現するようなものが取れることを示唆している。実際そのような基底の存在が SU(2) ゲージ理論の場合に提示された。そこでは Virasoro 代数だけでなく余分な U(1) 代数を適切に組み合わせることで、表現空間の基底として 2 つの Young 図の組で指定されるものが取れ (U(N) ゲージ理論のインスタントンは N 個の Young 図の組で指定される)、SU(2) ではなく U(2) ゲージ理論の Nekrasov 分配関数が再現できると示された。ただしこの基底は片方が空の場合を除いて間接的に存在が示されているだけである。しかし Liouville 理論の背景電荷が消える場合 (Virasoro 代数の中心電荷が 1、ゲージ理論側では自己双対オメガ背景に相当) には、2 つのシューア多項式の積で書くことが可能である。この結果はゲージ理論側での U(1) 因子に対応する余分な U(1) 代数を付け加えることが特殊な基底を構成する上で非常に重要であることを伝えており、更には Virasoro 代数や W_N 代数と U(1) 代数が結びついたより大きな代数が AGT 対応の背後にあることを強く示唆している。

本学位論文の主張は、少なくとも自己双対オメガ背景下では $W_{1+\infty}$ 代数が AGT 対応の背後にある本当の対称性である、ということである。$W_{1+\infty}$ 代数は自然に U(1) 代数を含んでいる。また我々は、中心電荷が整数 N の quasi-finite 表現という特別な表現を取ると $W_N \times U(1)$ 代数と等価であることを強くする示唆する結果を得ることを確認した。またこの表現は N 個の自由フェルミオンによって記述されるため N 個の Young 図の組で指定される基底を持ち、さらにボソン化すると N 個のシューア多項式の積になる。我々は、特に N=2 の場合に以前提唱された基底が正しく再現できていることを確認し N=3 の場合にも Nekrasov 公式を再現する基底が得られることを確認した。また一般の N において Nekrasov 分配関数が $W_{1+\infty}$ 代数から示唆される非自明な Virasoro 拘束条件を満たすことを示した。これらの結果は $W_{1+\infty}$ 代数の存在を確証付けるものである。

本学位論文の構成は以下のようになっている。chapter1 は introduction であり研究の背景と動機、結果の全体像が提示されている。chapter2 では、4 次元 N=2 超対称ゲージ理論の性質について特に Seiberg-Witte 理論、Nekrasov 分配関数の紹介、Witten による M 理論からの構成、それの Gaiotto による再構成によるリーマン面の幾何学によるゲージ理論の理解について紹介する。chapter3 では、2 次元共形場理論の性質の review と AGT 対応およびその一般化の説明を行う。chapter4 では、我々が論文 [1] で行った SU(3) クイバーゲージ理論での AGT-W 対応の検証を説明する。W_3 代数は非線形であるため、conformal identity によって相関関数を解くことが可能かどうかは明らかではない。我々は、対応するゲージ理論が Lagrngian で記述できる理論の場合には、相関関数が計算可能であることを示し、その計算手順の構築した。またそれを用いて 3 インスタントンまでで対応が正しいことを確認した。計算は複雑なため本論中では結果の提示のみを行い、具体的な計算結果は appendix にまとめた。chapter5 では、論文 [2] で行った、$W_{1+\infty}$ 代数と $U(1) \times W_N$ 代数の関係と、Nekrasov 分配関数の形を直接再現する基底が $W_{1+\infty}$ 代数では自然に構築できることを述べる。chapter6 では、論文 [3] で行った、Nekrasov 分配関数が $W_{1+\infty}$ 代数から示唆される Virasoro 拘束条件を満たすことを説明する。$W_{1+\infty}$ 代数の表現空間への作用について詳しく調べた後、満たされるべき拘束条件の導出を行い、その証明を行なう。ただし詳細な証明は複雑なため appedix にまとめた。chapter7 は本学位論文のまとめと今後の展望について述べられている。

1. Shoichi Kanno,Yutaka Matso,Shotaro Shiba "Analysis of correlation functions in Toda theory and AGT-W relation for SU(3) quiver" Phys.Rev.D82:066009,2010

2. Shoichi Kanno,Yutaka Matso,Shotaro Shiba "W(1+infinity) algebra as a symmetry behind AGT relation" Phys.Rev.D84:026007,2012

3. Shoichi Kanno,Yutaka Matso,Zhang Hong "Virasoro constraint for Nekrasov instanton partition function" JHEP1210(2012)097