論文審査の結果の要旨

氏　名　　浅 井　智 朗

2 階の拡散方程式に対して、その初期値問題の時間局所可解性は、非線形の場合も含めてよく研究されているが、4 階となると、最大値原理に代表される 2 階の手法がうまく使えないため、局所解の存在問題さえ簡単ではない。しかし材料科学で有名な表面拡散流方程式や、微分幾何学で用いられるウィルモア流は 4 階の準線形放物型方程式である。このような高階の非線形の放物型方程式に対し、できるだけ滑らかさが少ない初期値から解けるかという問題は放物型方程式の平滑化効果を見るうえで重要である。

このような考え方は偏微分方程式的手法で構成する場合にも重要な視点で、2 階の方程式に対してはよく知られている。

本博士論文では、次の 2 つのテーマを扱っている。

1. 抽象的放物型方程式に対して、初期値の滑らかさをあまり仮定しない場合の初期値問題の時間局所可解性および表面拡散流方程式等への応用
2. 表面拡散流方程式の自己相似解の存在

第 1 のテーマである抽象的放物型方程式論を用いて、非線形放物型方程式の時間局所解の構成は古くから知られていて、既に多くの研究があるが、具体的な問題に当てはめてみると、初期値の滑らかさを必要以上に仮定しなければ局所解は構成されていなかった。論文提出者は、ここに着目して、滑らかでない初期値を扱えるように、抽象的放物型方程式論を新たに整備した。

方程式の不変性に注目すると、表面拡散流方程式に対しては、初期（値）曲面が連続微分可能とするのが、自然な仮定と考えられる。しかし、これまで知られていた理論では少なくとも 2 階微分がヘルダー連続であることを必要としていた。幾何学的には曲率がヘルダー連続であることが要請されている。論文提出者は、これに対して初期曲面の 1 階微分がヘルダー連続という仮定で時間局所解を構成することに成功した。論文提出者は空間 1 次元の場合に適用できる手法と、より一般の次元でも通用する 2 つの手法を生み出した。空間 1 次元の場合は、曲線が関数のグラフで与えられる場合に、方程式の微分形に対して、それに合う抽象的放物型方程式に対しての理論を構築した。

これに対して高次元の問題では微分形には帰着できないので、もとの方程式そのものを取り扱う必要がある。これに対しては、DaPrato－Grivard による理論を改良して用いる。この理論は時間についての連続性についての最大正則性の理論を基礎にした抽象論であり、準線形放物型方程式の時間局所可解性にも応用できる。論文提出者は、低階

非線形項の見方を変え、抽象的準線形放物型方程式に対しての解の存在定理を導出した。この抽象的定理を表面拡散流方程式、ウィルモア流方程式だけではなく、結晶成長現象を記述するさまざまな高階放物型方程式に対して、あまり滑らかでない初期値から滑らかな時間局所解を構成することに成功している。抽象論は大変きれいで極めて自然な結果であり、豊かな応用があることも注目に値する。

第 2 のテーマは結晶表面の熱的くぼみの形成のモデルの数学解析である。結晶表面を半無限区間で定義された関数のグラフとし、端点で角度条件を課し、半無限区間では関数は表面拡散流方程式を満たすと仮定する。4 階方程式なので、もう 1 つ境界条件が必要で、曲率の微分をゼロと仮定する。この方程式の自己相似解を構成し、それが安定かどうか論じることは、このモデルの理論的裏付けのうえで重要である。

表面拡散流方程式に対しては、すべての条件を線形化した方程式の場合、自己相似解の存在が知られているだけであり、非線形の問題は手付かずであった。自己相似解より問題は 4 階の常微分方程式の境界条件を満たす半無限区間での問題に帰着されるが、この常微分方程式の大域解の存在をいうことは容易ではない。一方、斉次な初期値を与えて時間発展問題を解くといった手法は、儀我－宮川らによって 1990 年代に提案された自己相似解の構成手法であり、その後さまざまな方程式に利用されてきた。この手法の利点は、小さい自己相似解とその安定性が証明しやすいことにある。

論文提出者は、難題であるこの自己相似解の構成に対して、時間発展問題を解くことにより、部分的ではあるが構成することに成功した。より具体的には、3 階の境界条件は線形化し、方程式は表面拡散流方程式の微分形を考えるという問題である。ここで自己相似解を得るためには初期値をゼロとするのが自然である。しかしこれは境界条件を満たさない、いわゆる非整合の初期値である。抽象論的には主要部の線形作用素の定義域に入らないものである。このような問題に対して初期値問題を解くことに成功した。これはこの分野の他の成果と比べると、接触角に対する条件等がつくが先駆的な結果といえよう。

すべて重要な成果であるといえる。よって論文提出者の浅井智朗氏は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。