

論文の内容の要旨

論文題目

Quasi-morphisms on the group of area-preserving
diffeomorphisms of the 2-disk
(2次元円板の面積保存微分同相群上の擬準同型)

氏名 石田智彦

$\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ を, 2次元円板 D^2 の面積要素と向きを保存して, 境界のある近傍で恒等写像になっているような C^∞ 級微分同相写像全体のなす群とする. 本論文では, $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ 上の擬準同型について調べた.

群 G 上の関数 $\phi: G \rightarrow \mathbb{R}$ が擬準同型写像であるとは, $G \times G$ 上で

$$\phi(gh) - \phi(g) - \phi(h)$$

の値が一様に有界であることを言う. 更に, 擬準同型写像 $\phi \in$ が任意の $p \in \mathbb{Z}$ と $g \in G$ に対して

$$\phi(g^p) = p\phi(g)$$

を満たすとき, ϕ は homogeneous であると言う. 群 G 上の homogeneous な擬準同型写像全体のなすベクトル空間を $Q(G)$ と書く. homogeneous な擬準同型写像は群 G 上の共役不変量であることが定義だけから確認できる. このことは $Q(G)$ を調べる動機の1つである.

$Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ 上の擬準同型について, Gambaudo-Ghys によって次のことが知られている.

定理 1 (Theorem 1.1.). ベクトル空間 $Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ は無限次元である.

定理 1 を証明するにあたって, Gambaudo と Ghys は $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ 上の一次独立な擬準同型を加算個構成した. D^2 の n 次の pure braid 群 $P_n(D^2)$ 上の擬準同型から $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$

上の擬準同型を作る彼らの構成を一般化して、準同型写像

$$\Gamma_n: Q(P_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$$

が定義できる。

この写像 Γ_n について調べた結果、より強い以下の定理を得た。

定理 2 (Theorem 1.2.). 合成写像

$$\Gamma_n \circ Q(i): Q(B_n(D^2)) \rightarrow Q(P_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$$

は単射である。

ここで $B_n(D^2)$ は D^2 の n 次の braid 群、 $Q(i): Q(B_n(D^2)) \rightarrow Q(P_n(D^2))$ は自然な包含写像 $i: P_n(D^2) \rightarrow B_n(D^2)$ の誘導する準同型写像 ($Q(P_n(D^2))$ への制限) である。

また、 $\Gamma_n: Q(P_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ は、 $Q(P_n(D^2))$ 上の \mathbb{R} への準同型写像を $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ 上の \mathbb{R} への準同型写像にうつすことも分かる。よって次の命題も従う。

命題 3 (Proposition 3.3.). 合成写像 $\Gamma_n \circ Q(i): Q(B_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ から誘導される商ベクトル空間の準同型写像

$$Q(B_n(D^2))/H^1(B_n(D^2); \mathbb{R}) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))/H^1(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2); \mathbb{R})$$

は単射である。

また、準同型写像 $\Gamma_n: Q(P_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ と同様に、球面 S^2 の pure braid 群 $P_n(S^2)$ と球面の C^∞ -級面積保存微分同相群の単位成分 $\text{Diff}_\Omega^\infty(S^2)_0$ の間でも準同型写像

$$\Gamma_n: Q(P_n(S^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(S^2)_0)$$

が構成でき、定理 2 と同様の定理が成立する。つまり、次の定理が成り立つ。

定理 4 (Theorem 3.4.). 合成写像

$$\Gamma_n \circ Q(i): Q(B_n(S^2)) \rightarrow Q(P_n(S^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(S^2)_0)$$

は単射である。

ここで $B_n(S^2)$ は S^2 の n 次の braid 群、 $Q(i): Q(B_n(S^2)) \rightarrow Q(P_n(S^2))$ は自然な包含写像 $i: P_n(S^2) \rightarrow B_n(S^2)$ の誘導する準同型写像 ($Q(P_n(S^2))$ への制限) である。

さて、定理 2 にあるように、合成写像 $\Gamma_n \circ Q(i): Q(B_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ は単射だが、 $\Gamma_n: Q(P_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ それ自体は単射では無い。そこで、 $\Gamma_n: Q(P_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ の核を調べるために、群 G とその有限指数部分群 H に対して、群のコホモロジーにおいて定義される transfer 写像

$$\mathcal{T}: H^*(H) \rightarrow H^*(G)$$

の擬準同型への拡張

$$\mathcal{T}: Q(H) \rightarrow Q(G)$$

を定義した。擬準同型の transfer 写像も、群コホモロジーの transfer 写像と同様、

$$\mathcal{T} \circ Q(i) = \text{id}: Q(G) \rightarrow Q(G)$$

を満たす。ここで、 $Q(i): Q(G) \rightarrow Q(H)$ は自然な包含写像 $i: H \rightarrow G$ の誘導する準同型写像 ($Q(H)$ への制限) である。 $G = B_n(D^2)$, $H = P_n(D^2)$ としたとき、この transfer 写像について次が成り立つ。

命題 5 (Proposition 4.6.). 合成写像

$$\Gamma_n \circ Q(i) \circ \mathcal{T}: Q(P_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$$

は Γ_n と一致する。特に、 $\text{Ker}(\Gamma_n) = \text{Ker}(\mathcal{T})$, $\text{Im}(\Gamma_n) = \text{Im}(\Gamma_n \circ Q(i))$ である。

$G = B_n(S^2)$, $H = P_n(S^2)$ についても、命題 5 と同様の主張が成り立つ。

また、完全群 G 上の擬準同型と G の元 g の安定交換子長 $\text{scl}(g)$ について、次の Bavard の双対定理と呼ばれる定理が知られている。

定理 6 (Theorem 5.1.). 任意の $g \in G$ に対して、

$$\text{scl}(g) = \sup_{\phi \in Q(G)} \frac{|\phi(g)|}{2D(\phi)}$$

が成り立つ。

そこで、Gambaudo-Ghys の構成から得られる擬準同型を利用して、 $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ の交換子群および $\text{Diff}_\Omega^\infty(S^2)_0$ の一部の元について、安定交換子長の下限の計算例を作った。まず、 D^2 を \mathbb{R}^2 の部分集合

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

と同一視しておく。 $\omega: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ -関数で、1 の近傍では 0 であり、1 の近傍では定数関数であるようなものとする。各 $x \in D^2$ を 0 の周りに角 $\omega(|x|)$ だけ回転させる写像として D^2 の面積保存微分同相写像 $F_\omega \in \text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ を定義する。 $a(r)$ を D^2 の半径 r 以下の部分の面積とすると、次の命題が従う。

命題 7 (Proposition 5.3.). $F_\omega \in \text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ が $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ の交換子群に含まれるための必要十分条件は、

$$\int_0^1 \omega(r)a(r)da(r) = 0$$

であることである。

命題 8 (Proposition 5.5.). F_ω が $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ の交換子群に含まれているとする。このとき、

$$\text{scl}(F_\omega) \geq \frac{3}{4\text{area}(D^2)} \left| \int_0^1 \omega(r)a(r)^2 da(r) \right|.$$

が成り立つ。特に、 $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ 上の安定交換子長は非有界である。

また, S^2 を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視し, $\omega: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を 0 の近傍とあるコンパクト集合の外では定数写像であるような C^∞ -関数とする. 各 $z \in S^2$ を 0 の周りに $\omega(|z|)$ だけ回転させる写像として S^2 の面積保存微分同相写像 $F_\omega \in \text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ を定義する. $a(r)$ を S^2 の半径 r 以下の部分の面積とすると, 次の命題が従う.

命題 9 (Proposition 5.7.). 任意の $F_\omega \in \text{Diff}_\Omega^\infty(S^2)_0$ に対して,

$$\text{scl}(F_\omega) \geq \frac{1}{\text{area}(S^2)} \left| \int_0^\infty \omega(r) a(r) (1 - a(r)) (1 - 2a(r)) da(r) \right|$$

が成り立つ.

Gambaudo-Ghys によって構成された擬準同型たちの他に, $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ 上の擬準同型として知られているものは, 古典的な Ruell の擬準同型 R の他, Entov-Polterovich によって非可算個構成された擬準同型の族 $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon \in (\frac{1}{2}, 1)}$ がある. これらの擬準同型について, 次の命題を得た.

命題 10 (Proposition 6.5.). $n \geq 3$ とする. V を $Q(B_n(D^2))$ の一次独立な擬準同型から成る有限集合, $I \subset (\frac{1}{2}, 1)$ を有限部分集合とする. このとき, $\{\Gamma_n(\phi)\}_{\phi \in V}$, $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon \in I}$, R は一次独立である.