

論文審査の結果の要旨

氏名 石田 智彦

群の同次擬準同型の空間の研究は、1991年のBavardの論文に始まっている。群 G 上の実数値関数 ϕ が同次擬準同型であるとは、 $\phi(gh) - \phi(g) - \phi(h)$ が有界で、整数 n に対し $\phi(g^n) = n\phi(g)$ をみたすことで定義され、同次擬準同型は群上の類関数となる。Bavardによれば群の元の安定交換子長は、非自明な同次擬準同型の値をそのデフェクトで割ったもので下から評価される。様々な動機からブレイド群、写像類群、微分同相群など様々な群の同次擬準同型の空間が研究されてきた。

論文提出者石田智彦は、Gambaudo-Ghysの2004年の論文で提案された2次元円板の純ブレイド群 $P_n(D^2)$ の同次擬準同型の空間 $Q(P_n(D^2))$ から2次元円板の境界で恒等写像となる面積を保つ微分同相の群 $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ の同次擬準同型の空間 $Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ への準同型 $\Gamma_n : Q(P_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ について研究している。

論文の第3節において、まずGambaudo-Ghysの準同型の定義が意味のあるものであつたこと(積分の収束)を示した。さらに純ブレイド群のブレイド群への埋め込み $i : P_n(D^2) \rightarrow B_n(D^2)$ により引き起こされる準同型 $Q(i) : Q(B_n(D^2)) \rightarrow Q(P_n(D^2))$ との合成を考えると、 $\Gamma_n \circ Q(i) : Q(B_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ が単射であることを示した。また、2次元球面のブレイド群 $B_n(S^2)$ と2次元球面の面積を保つ微分同相の群 $\text{Diff}_\Omega^\infty(S^2)_0$ の同次擬準同型の空間の間の写像も定義され、単射となることを導いている。準同型 $\Gamma_n : Q(P_n(D^2)) \rightarrow Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ の核については、第4節において、それを転入準同型写像を用いて明らかにしている。

第5節においては、Bavardの結果に基づき、Gambaudo-Ghysが導入した2次元円板、2次元球面の面積を保つ微分同相写像の安定交換子長を具体的に評価する式を導いている。

第6節においては、 Γ_n の像にある擬準同型、Ruelleの擬準同型、Entov-Polterovichの擬準同型が、線形独立であることを示し、第7節においては、群 $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ 上のBrago-Entov-Polterovichのノルムについて議論し、fragmentationノルムが非有界であることを示している。

第8章では、 Γ_n の像にある擬準同型 $\Gamma_n(\phi)$ を群 $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ 上の擬準同型から、境界の近傍で回転であるような面積を保つ微分同相写像の群上の擬準同型に拡張している。

この中で特に、論文提出者の示した単射性は、無限次元であることが知られている $Q(B_n(D^2))$ あるいは $Q(B_n(S^2))$ よりも $Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2))$ あるいは $Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(S^2)_0)$ が大きいというだけでなく、面積を保存する微分同相のダイ

ナミックスを反映した不変量を定義し、 $\text{Diff}_\Omega^\infty(D^2, \partial D^2)$ や $Q(\text{Diff}_\Omega^\infty(S^2)_0)$ の群としての性質を調べる道具となる応用の広い結果である。

このように、論文提出者の結果は、群の同次擬準同型の空間、面積を保つ微分同相群の研究において重要な意味を持つものである。よって論文提出者 石田智彦は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。