論文審査の結果の要旨

氏　名　　　　加　藤　直　樹

葉層構造の構成と分類の問題は、葉層構造の基本的な理論が 1960 年代に完成された後、現在に至るまで重要な問題である。初期の葉層構造の構成は、群作用を用いるものであって、リー群のそれ自身への部分群の作用によって構成されるものは典型的なものである。このような葉層構造は、横断的構造がリー群とその群自身の作用をモデルとしたものになっている。これをリー葉層と呼ぶ。1980 年代の Molino の横断的にリーマン構造を持つ葉層（リーマン葉層）の研究においては、リーマン葉層の横断的正規直交枠場への持ち上げにおける葉の閉包は、リー葉層であることが示されている。リー葉層は、局所的に定義されている構造であるから、多様体のベクトル場、葉に接するベクトル場、葉に横断的なベクトル場とリー群のリー環によって表現することができるので、構造を与えるリー環 $\mathfrak{g}$ により、リー $\mathfrak{g}$ 葉層とよぶ。葉層の余次元は $\dim\mathfrak{g}$ である。

閉多様体上のリー葉層に対しては、葉の閉包によるファイバー束構造が得られることが知られている。葉の閉包はモデルとするリー群のリー環 $\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{h}$ で記述され、$\mathfrak{h}$ は構造リー環と呼ばれる。リー葉層の構成と分類の問題は、リー環 $\mathfrak{g}$ と構造リー環 $\mathfrak{h}$ の対に対しての問題として定式化される。$\dim\mathfrak{h}$ が葉の閉包の次元と葉の次元の差となる。リー葉層の次元が 1 のとき、構造リー環は可換リー環 $\mathbf{R}^{\dim\mathfrak{h}}$ となる。

リー葉層の構成の問題については、余次元 1, 2 の場合は容易にわかる。それ以外では、余次元 3 で葉層の次元が 1 の場合に Gallego, Herrera, Llabrés, Reventós によって解決されているが、一般の余次元に対しては、その次元のリー環の一部に対してしか知られていない。そこで、一般の余次元に対しては、適当なリー環の族に対して考えることになる。

論文提出者 加藤直樹は、ベキ零リー環について、この構成の問題を研究している。

論文の主結果は次の 2 つである。

定理. $\mathfrak{g}$ を構造定数が有理数であるようなベキ零リー環とする。$\mathfrak{g}$ のある部分リー環 $\mathbf{R}^m$ に対し、$\mathbf{R}^m$ を構造リー環とする閉多様体の次元 1 のリー $\mathfrak{g}$ 葉層が存在するための必要十分条件は m が $\mathfrak{g}$ の中心の次元以下であることである。

定理. $\mathfrak{g}$ をベキ零リー環、$\mathfrak{h}$ を部分リー環とするとき、$\mathfrak{h}$ を構造リー環とする閉多様体のリー $\mathfrak{g}$ 葉層が存在するための必要十分条件は、$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアル

であり、$\mathfrak{h} \setminus \mathfrak{g}$ が構造定数が有理数であるようなベキ零リー環の構造をもつことである。

また、論文提出者は、構造定数が有理数にとれないベキ零リー環 $\mathfrak{g}$ で、閉多様体の次元 1 のリー $\mathfrak{g}$ 葉層が存在しないものもあることを示している。このようなリー環は 12 次元以上のベキ零リー環として実際に構成される。一方、構造定数が有理数にとれないベキ零リー環 $\mathfrak{g}$ で、閉多様体の次元 1 のリー $\mathfrak{g}$ 葉層が存在するものの存在も示している。このあたりの微妙なところは、新しい問題を提示している。

これらの結果は、今後の横断構造をもつ葉層構造の研究において重要なものである。よって論文提出者 加藤直樹は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。