論文の内容の要旨

論文題目

Uniform Representability of the Brauer Group
of Diagonal Cubic Surfaces

(対角的３次曲面の Brauer 群の統一的な表示可能性について)

氏名：植松 哲也

1　動機と先行結果

体 k 上の代数多様体 X に対するコホモロジカル Brauer 群 $\mathrm{Br}(X)$ は, A. Grothendieck により導入された ([Gro68a], [Gro68b], [Gro68c]). この Brauer 群という不変量は, 単有理かつ非有理な曲面の構成 ([AM72]) など代数幾何学的な応用の他, 代数体上の多様体に対する Hasse 原理 の成立判定の重要な手段として知られる Brauer-Manin 障害の構成 ([Man71]) に用いられるなど, 整数論への応用も知られている重要な研究対象である.

こういった諸分野への応用を試みるとき,

- Brauer 群のアーベル群としての構造を知ること

と合わせて, 重要となるのが,

- Brauer 群の元を, 扱いやすい形で書き下すこと

である. ここでの「扱いやすい形」は, 問題設定により変わりうるが, ここでは, 代数多様体の関数体 $k(X)$ の元から定まるような, ノルム剰余記号による表示を考える. この表示について振り返っておく. 一般に, n を正整数, K をその標数が n と互いに素な体とするとき, Kummer 系列により, ノルム剰余写像

$$\{\cdot,\cdot\}_n\colon K^*\otimes K^*\to H^2(K,\mu_n^{\otimes 2})$$

が定まる. したがって, k を 1 の原始 n 乗根を含む体, X を k 上の滑らかな代数多様体 X とすれば, 上において, $K=k(X)$ とした場合に, 同型 $\mu_n\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を通して, $k(X)^*\otimes k(X)^*$ か

ら $\mathrm{Br}(k(X))$ への写像が定まる．これにより, 自然な埋め込み $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(k(X))$ を通して, $\mathrm{Br}(X)$ の位数 n の元をノルム剰余記号により表すことができるのであった．しかしながら, 一般に, $\mathrm{Br}(k(X))$ の元が, $\mathrm{Br}(X)$ 由来であることを示すのは容易ではなく, また, $\mathrm{Br}(X)$ から来ていることが分かったとしても, そのノルム剰余記号による表示が分かるものでもない．

Yu. I. Manin は, 対角的 3 次曲面と呼ばれる, 特別な形の幾何学的有理曲面に対して, 上記の問題を考察した ([Man86])．以下, k は 1 の原始 3 乗根 ζ を含むような標数 0 の体とし, k 上の対角的 3 次曲面とは, k-係数の斉次多項式

$$x^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$$

で定義されるような滑らかな射影的曲面をさすものとする.

Manin の結果は次の通りである．

定理 1.1. $d \in k^* \setminus (k^*)^3$ とし, V を

$$x^3 + y^3 + z^3 + dt^3 = 0$$

で定義される k 上の対角的 3 次曲面とする. このとき, 以下が成り立つ :

(1) $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(2) 次のノルム剰余記号

$$e_1 = \left\{ d, \frac{x+\zeta y}{x+y} \right\}_3, \quad e_2 = \left\{ d, \frac{x+z}{x+y} \right\}_3 \in \mathrm{Br}(k(V))$$

は $\mathrm{Br}(V)$ の元を定める.

(3) e_1, e_2 の $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k)$ における像は, この群の生成元となる.

2 本論文の主結果

Manin の結果においては, 対角的 3 次曲面の定義方程式の係数が変化しうるのは 1 つのみであった．本論文は, これを一般化し, すべての対角的 3 次曲面に対し拡張することを試みたものである．

1 つ目の結果として, まず, 曲面が

$$V : x^3 + y^3 + cz^3 + dt^3 = 0, \quad c, d \in k^*$$

の場合を考察し, 次の結果を得た:

定理 2.1 (論文, Theorem 5.1.1)**.** k, V を上の通りとし, さらに, $c, d, cd, c/d \notin (k^*)^3$ とする. このとき, 以下が成り立つ :

(1) $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(2) 次のノルム剰余記号

$$e_1 = \left\{ \frac{d}{c}, \frac{x+\zeta y}{x+y} \right\}_3 \in \mathrm{Br}(k(V))$$

は $\mathrm{Br}(V)$ の元を定める．

(3) e_1 の $\mathrm{Br}(V)/\mathrm{Br}(k)$ における像は，この群の生成元となる．

群構造に関する結果 (1) は本質的に，J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, J.-J. Sansuc の論文 ([CTKS87]) において扱われている．

一般には，生成元が存在するとしても，その表示の形は，係数の取り方ごとに変わりうるが，定理 2.1 においては，生成元の形が，係数 c, d に依存しない統一的な形で書き表せていることに注意する．換言すれば，c, d を変数とみて，ノルム剰余記号

$$e(c,d) = \left\{ \frac{d}{c}, \frac{x+\zeta y}{x+y} \right\}_3$$

を考えたとき，個々の曲面 $x^3 + y^3 + c_0 z^3 + d_0 t^3 = 0$ の Brauer 群の生成元は，すべて $e(c,d)$ に (c_0, d_0) を「代入して」得られる，いわば，生成元の公式に当たるものが存在している，ということである．Manin の結果についても同様のことがいえる．

本論文の 2 つ目の結果は，曲面の定義方程式を一般の $x^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$ にした場合には，この統一的な意味での生成元が存在しないということを主張するものである．

b, c, d を不定元とし，V を $F = k(b,c,d)$ 上の対角的 3 次曲面 $x^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0$ とする．$P = (b_0, c_0, d_0) \in (\mathbb{G}_m)^3(k)$ に対し，V_P を k 上の $x^3 + b_0 y^3 + c_0 z^3 + d_0 t^3 = 0$ で定義される対角的 3 次曲面とする．各 $e \in \mathrm{Br}(V)$ に対し，適当な開集合 $U \subset (\mathbb{G}_m)^3$ が存在して，e の $P \in U(k)$ における特殊化

$$\mathrm{sp}(e; P) \in \mathrm{Br}(V_P)$$

が定義される (論文, Subsection 4.2.5)．これは，先に述べた代入操作を定式化したものである．また，有理点の集合 $\mathcal{P}_k$ を

$$\mathcal{P}_k = \{ P \in (\mathbb{G}_m)^3(k) \mid \mathrm{Br}(V_P)/\mathrm{Br}(k) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}. \}$$

により定義する．このとき，定理は次のように述べることができる．

定理 2.2 (論文, Corollary 6.2.3)**.** *k, F, V を上の通りとし，さらに $\dim_{\mathbb{F}_3} k^*/(k^*)^3 \geq 2$ を仮定する．このとき，次の条件を満たす $e \in \mathrm{Br}(V)$ は存在しない：*

> *開集合 $W \subset (\mathbb{G}_m)^3$ であって，$\mathrm{sp}(e; \cdot)$ が $W(k) \cap \mathcal{P}_k$ 上定義され，かつ，すべての $P \in W(k) \cap \mathcal{P}_k$ に対して，$\mathrm{sp}(e; P)$ が $\mathrm{Br}(V_P)/\mathrm{Br}(k)$ の生成元を与えるようなものが存在する．*

体 k の条件 $\dim_{\mathbb{F}_3} k^*/(k^*)^3 \geq 2$ は $\mathcal{P}_k \in (\mathbb{G}_m)^3$ の稠密性を保証するためのものである（論文, Subsection 6.2）．

この結果は単純化して言えば，係数の動く範囲をどんなに狭めたとしても，その範囲の点を代入して得られるすべての曲面に対して，その Brauer 群の生成元を与えてくれるような，大本の統一的表示は存在しないということになる．これは，Manin の結果および，定理 2.1 の拡張には限界があることを示している点で重要である．

定理 2.2 は次の結果の帰結として得られる:

定理 2.3 (論文, Theorem 6.1.3)**.** k, F, V を上の通りとする．このとき,

$$\operatorname{Br}(V)/\operatorname{Br}(F) = 0.$$

一般の幾何学的有理な代数多様体 X/k に対し, Brauer 群 $\operatorname{Br}(X)/\operatorname{Br}(k)$ の構造の決定には, そこから Galois コホモロジー $H^1(k, \operatorname{Pic}(\overline{X}))$ への単射が存在し, さらに, X に k-有理点が存在する, あるいは体 k のコホモロジー次元が 2 以下といった仮定のもとでは, それが同型になる, ということを用いるものが, 主流である．しかしながら, 定理 2.3 の V/F は $H^1(F, \operatorname{Pic}(\overline{V})) \neq 0$ であり, したがって, 同型性に必要などちらの仮定も満たしていない．定理 2.3 は, 定理 2.2 を帰結するための本質的命題というだけでなく, Brauer 群の構造が従来の議論から容易に帰結されないようなクラスの多様体に対する, 新規性のある計算例を提示しているという点でも重要である．

参考文献

[AM72] M. Artin and D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), no. 3, 75–95.

[CTKS87] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, and J.-J. Sansuc, *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1290, Springer, Berlin, 1987, pp. 1–108.

[Gro68a] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–65.

[Gro68b] ———, *Le groupe de Brauer II*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 66–87.

[Gro68c] ———, *Le groupe de Brauer III*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 88–188.

[Man71] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes de Congres international de Mathematiciens (Nice, 1970), vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.

[Man86] ———, *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*, North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986, Translated from Russian by Hazewinkel, M.