# 論文審査の結果の要旨

氏　名　　　植松　哲也

整数論における重要な概念である体の Brauer 群が ガロワ・コホモロジー的記述をもつという事実に基づき，A. Grothendieck は体 $k$ 上定義された代数多様体 $V$ の Brauer 群 $\mathrm{Br}(V)$ を $V$ の不変量 $H^2(V, \mathcal{O}_X^\times)$ として定義した．この不変量の応用として， Artin-Mumford による非有理な単有理多様体の構成 （1972）や $V$ における Hasse 原理成立判定などがあり，Brauer 群は代数幾何学および数論において非常に重要な研究対象である．しかし一方で Brauer 群の構造はきわめて複雑難解であって，非常に単純な多様体 $V$ であっても，$\mathrm{Br}(V)$ について知られていることはほとんど皆無というのが現状である．

提出論文では，$k$ として１の原始３乗根を含む標数０の体，$V$ として $x^3+by^3+cz^3=d$ という非斉次３次式で定義される「対角型３次曲面」を選び，Brauer 群 $\mathrm{Br}(V)$ について，その抽象アーベル群としての構造，および群の生成元の記述を考察し，対角型３次曲面のパラメータ $b,c,d\in k$ を自由に動かしたとき，$\mathrm{Br}(V)$ のパラメータ付き生成元は存在しない，という意外な結果を得た（後述の定理２）．これは底空間 $V$ の変形に対する $\mathrm{Br}(V)$ の挙動がきわめて複雑であることを立証するもので，非常に興味深い知見である．

以下に結果の概略を述べる．

パラメータ $b,c,d\in k$ をもつ対角型３次曲面 $V$ の関数体 $k(V)$ に付随する３次のノルム剰余記号を $\{\ ,\ \}_3\colon k(V)^*\otimes k(V)^*\to H^2(k(V),\mu_3^{\otimes 2})$ で表し，その $\mathrm{Br}(k(V))=H^2(k(V),k(V))$ 内の像も同じ記号で表すことにする．また自然な埋め込みによって $\mathrm{Br}(V)$ を $\mathrm{Br}(k(V))$ の部分群とみなす．$\zeta\in k$ を１の原始３乗根とする．

Manin による次のような定理が，本研究のきっかけである．

$b=c=1$, $d\in k^*\setminus(k^*)^3$ としたとき，$\mathrm{Br}(V)\simeq\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であって，その生成元はノルム剰余記号

$$\left\{d, \frac{x+\zeta}{x+y}\right\}_3, \left\{d, \frac{x+z}{x+y}\right\}_3$$

によって与えられる．

Manin の定理において 1 であったパラメータ $b,c$ を動かしたときの $\mathrm{Br}(V)$ を考察することによって，本論文では以下の結果を得た．

**定理 1．** $b=1$ とし，$c, d, cd, c/d \notin (k^*)^*$ とすると，$\mathrm{Br}(V) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であって，その生成元は

$$\left\{\frac{d}{c}, \frac{x+\zeta}{x+y}\right\}_3$$

で与えられる．

**定理2．** $a, b, c$ を不定元として，$x^3+by^3+cz^3=d$ で定義される対角型３次曲面 $V=V_{(b,c,d)}$ を体 $F=k(b,c,d)$ 上の曲面とみなす．また $\mathcal{P}_k \subset (\mathrm{G_m}\times\mathrm{G_m}\times\mathrm{G_m})_k$ を $\{P=(\beta,\gamma,\delta); \mathrm{Br}(V_P) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$ とおき，$\dim_{\mathbb{F}_3} k^*/(k^*)^3 \geq 2$ と仮定する．このとき，$\mathcal{P}_k$ は $\mathrm{G_m}\times\mathrm{G_m}\times\mathrm{G_m}$ の中で Zariski 稠密であるが，いかなる元 $e \in \mathrm{Br}(V)$ といかなる Zariski 開集合 $W \subset \mathrm{G_m}\times\mathrm{G_m}\times\mathrm{G_m}$ を選んでも，$W(k)\cap\mathcal{P}_k$ の点 $P=(\beta,\gamma,\delta)$ すべてに対して $(b,c,d)\mapsto P=(\beta,\gamma,\delta)$ による $e$ の特殊化 $e_P$ が $\mathrm{Br}(V_P)$ の生成元を与えるということはあり得ない．換言すれば，パラメータ付き曲面 $\{V_P\}_{P\in\mathcal{P}_k}$ の Brauer 群に対しては，$P$ をパラメータとする生成元は存在しない．

上記二つの定理のうち，定理１の結果および証明は Manin の定理のそれとほぼ平行であって，新しい結果とはいいながら，真に目新しい結果とは言えない．それに対して定理２のほうは，ノルム剰余記号といった既存の道具をもってしては $\mathrm{Br}(V_P)$ の構造を捉えることが不可能であることを示すものとして，これまでに類例のない斬新な結果である．定理２の証明の鍵は $F=k(b,c,d)$ 上定義された上述の $V$ に対して同型 $\mathrm{Br}(F)\simeq\mathrm{Br}(V)$ を示すことであって，本論文ではこの同型を従来行われたことのない独創的な計算を実行することで証明した．

提出論文は技術困難を伴う Brauer 群の計算を独自の視点と手法で実行することにより Brauer 群理論の複雑な様相を浮き彫りにしたものとして，十分な新規性をもつとともに，当該研究分野における重要な貢献と考えられる．

よって論文提出者　植松哲也は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい資格があると認める．