

論文審査の結果の要旨

氏 名 ウズン メジト ケレム

Uzun Mecit Kerem 氏は、本論文で、 p 進体上のスムーズな開代数多様体の類体論を研究し、整数環上スムーズなコンパクト化の存在という仮定のもとで高次元類体論の同形を証明しました。これは、Moritz Kerz 氏と齋藤秀司氏による最近の加藤ホモロジーの消滅に関する結果を巧みに使うもので、先行結果を大きく改良するものです。

k を p 進体 \mathbf{Q}_p の有限次拡大とし、 X を k 上スムーズなスキームとする。 $X_{(a)}$ で閉包の次元が a の点のなす X の部分集合を表すと、局所類体論と基本群の関手性より、標準射

$$\bigoplus_{x \in X_{(0)}} k(x)^\times \rightarrow \pi_1^{\text{ab}}(X) \quad (1)$$

が定まる。 X がさらにプロパーと仮定すると、(1) は馴記号が定める射

$$\bigoplus_{x \in X_{(1)}} K_2(y) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_{(0)}} k(x)^\times \quad (2)$$

の余核からの射

$$SK_1(X) \rightarrow \pi_1^{\text{ab}}(X) \quad (3)$$

をひきおこす。 X がプロパーという仮定のもとでも、 X がよい還元をもたなければ射 (3) は一般には同形とは限らないことが知られている。

Uzun 氏は本論文で、まずプロパーな X がよい還元をもつと仮定すれば射 (3) の射影有限完備化が同形であることを、上記の加藤ホモロジーの消滅を使って示した。さらにこのこととモチヴィック・ホモロジーの理論とくに Ivorra による ℓ 進実現の構成を使って、整数環上のスムーズなコンパクト化をもつ p 進体上のスムーズな d 次元スキーム U と自然数 $n \geq 1$ に対し、モチヴィック・ホモロジー群からの標準同形

$$H_{-1}^M(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(-1)) \rightarrow \pi_1^{\text{ab}}(U)/\pi_1^{\text{ab}}(U)^n \quad (4)$$

を示した。

(4) の左辺のモチヴィック・ホモロジー群 $H_{-1}^M(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(-1))$ は山崎隆雄氏により、射 (2) の $\bigoplus_{x \in X_{(1)}} K_2(y)$ の部分群への制限の余核 $C_1(X)$ としての表示が与えられている。山崎氏は (4) が同形であることを、 X が曲線の積である場合や幾何的に有理曲面である場合などに証明していた。Uzun 氏の今回の結果は、この結果を大きく改良するものである。

証明の方針は次のとおりである．まず高次 Chow 群からエタール・コホモロジーへの標準射

$$CH^{d+1}(U, 1; \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow H_{\text{ét}}^{2d+1}(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d+1)) \quad (5)$$

を考察する． $U = X$ がプロパーのときには，(5) の左辺の高次 Chow 群はモチヴィック・ホモロジー群の双対性より $H_1^M(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(-1))$ と標準的に同一視される．ポワソナレ双対性と局所類体論より，標準同形 $\pi_1^{\text{ab}}(U)/\pi_1^{\text{ab}}(U)^n \rightarrow H_{\text{ét}}^{2d+1}(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d+1))$ があるから，これも $U = X$ がプロパーのときには右辺は $\pi_1^{\text{ab}}(U)/\pi_1^{\text{ab}}(U)^n$ と同一視される．(5) の両辺にそれぞれ収束する niveau スペクトル系列を比較すると，ホモロジー代数の議論により (5) の核と余核は加藤ホモロジーで抑えられる．この部分が技術的には本論文の鍵となるところである． $X = U$ がプロパーでよい還元をもつと仮定すると，Kerz 氏と齋藤秀司氏の結果によりこの加藤ホモロジーは 0 であり，この場合に同形 (4) が得られる．

一般の場合には，補集合 $X - U$ の次元に関する帰納法で， $X = U$ がプロパーでよい還元をもつ場合に帰着させて証明する．この場合には，モチヴィック・ホモロジーとコンパクト台エタール・コホモロジーの局所化長完全系列を比較する．このずれを統制することが必要となるが，上と同様の議論でやはりずれは加藤ホモロジーで抑えられ，この場合には加藤ホモロジーは明らかな理由で 0 になる．

以上の結果は，局所体上の多様体の高次元類体論とその高次のモチヴィック・ホモロジーへの拡張に対して新しい知見を与えるものとして評価される．よって論文提出者 Uzun Mecit Kerem 氏は博士（数理科学）の学位をうけるにふさわしい十分な資格があると認める．