

## 論文審査の結果の要旨

氏名 大島 芳樹

表現の分岐則の問題とは、既約表現を部分群に制限したときにどのように分解するかを問うものである。

まず問題の背景であるユニタリ表現の分岐則について述べる。Hilbert 空間の直積分の概念を用いると、実簡約リー群の任意のユニタリ表現は、既約ユニタリ表現のとして一意的に表せることが知られている。いま  $G$  を実簡約リー群とし、 $G'$  をその部分簡約リー群とすると、特に  $G$  のユニタリ表現の  $G'$  への制限も  $G'$  の既約ユニタリ表現の直積分に分解する：

$$\pi|_{G'} \simeq \int_{\sigma \in \widehat{G'}} m(\sigma) \cdot \sigma d\mu(\sigma) \quad (1)$$

ここで  $m(\sigma) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  は重複度を表す。

この抽象的な分解が具体的にどのような分解になっているかを解明することは、実簡約リー群のユニタリ表現の分岐則における重要な研究テーマである。

部分群  $G'$  がコンパクトではない場合、(1) は連続スペクトルを含むことが多く、また重複度  $m(\sigma)$  もしばしば無限になるため、分岐則の問題は非常に困難であり、1980年代までわずかな事例研究しか行われていなかった。1990年代に小林俊行による一連の論文 (Invent. Math. 1994; Ann. Math. 1998; Invent. Math. 1998) において、良い振る舞いをするクラスに着目して分岐則を研究する構想が提唱され、特に、その中で最も良いクラスとしての離散的分解性の概念が導入され、そのむ一般理論が構築され、その後の発展の契機となった。

さて、表現の制限が離散分解可能な場合には、分岐則の問題は  $(\mathfrak{g}, K)$  加群 (Harish-Chandra 加群とも呼ばれる) を用いて純粋に代数的な問題として扱うことができるという利点がある。すなわち、 $(\mathfrak{g}, K)$  加群  $V$  がユニタリ化可能であって、かつ離散分解可能な場合には、対応する群の表現の制限 (1) は連続スペクトルを含まず、さらに二つの分岐則の問題は等価になる (T.Kobayashi 2000)。そこで、離散分解可能な枠組のなかで、種々の分岐則が計算可能になり、1990年代半ばから現在まで約 20 年間にわたって、Kobayashi, Wallach, Duflo, Vargas, J.-S.Li, Ørsted, Sekiguchi, Speh 等によって  $G'$  が非コンパクトの場合に種々の場合に離散的な分岐則が新たに発見されてきた。

大島氏の博士論文では

- (イ)  $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の  $\pi$  が Zuckerman 導来関手加群  $A_q(\lambda)$ ,
- (ロ)  $(G, G')$  が対称対
- (ハ)  $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の制限  $A_q(\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')}$  が離散分解する

という3つの仮定のもとに  $(\mathfrak{g}, K)$ -加群の制限  $A_q(\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')}$  が離散分解の公式を求めることを目標としている。その主結果は以下の形で述べられる。

**Theorem.**  $\lambda$  が *weakly fair* で  $A_q(\lambda)$  が 0 でなく、さらに制限  $A_q(\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')}$  が離散分解可能であるとする。このとき、次の  $(\mathfrak{g}', K')$  加群の Grothendieck 群における等式が

成り立つ。

$$[A_q(\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')}] = \sum_{j=1}^n \sum_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (-1)^{d+s_j+u_j} [(P_{\bar{q}_j \cap \mathfrak{g}', C'_j}^{\mathfrak{g}', K'})_d(\mathbb{C}_\lambda \otimes S(\mathfrak{g}/(\bar{q}_j + \mathfrak{g}')))]. \quad (2)$$

大まかに言うと、コホモロジー的誘導と制限が可換であるということを正確に定式化し、証明した定理である。

具体的な分岐則の導出のためには、さらに等式 (2) の右辺を書き直す必要がある。

まず、(イ)の対象がどのくらいあるかはルート系のデータで記述でき、(ロ)は M.Berger によって無限小の意味で分類されている。(ハ)は離散分解が可能かどうかに関する判定条件 (T.Kobayashi, 1994, 1998) を用いることにより、Kobayashi–Y.Oshima が完全な分類を与えた (Advances in Mathematics, 2012)。

大島芳樹氏は、この分類を用いて、各場合ごとに考察し、制限  $A_q(\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')}$  は  $G'$  についての Zuckerman 導来関手加群  $A_{q'}(\lambda')$  の直和に分解することを証明した。すなわち分岐公式は

$$A_q(\lambda)|_{(\mathfrak{g}', K')} \simeq \bigoplus_q \bigoplus_{\lambda'} m(q', \lambda') A_{q'}(\lambda'), \quad m(q', \lambda') \in \mathbb{N}$$

の形になる。

定理の恒等式 (2) の証明には、旗多様体上の  $\mathcal{D}$  加群による  $(\mathfrak{g}, K)$  加群の幾何学的実現を用いる。Beilinson–Bernstein 対応によれば、任意の既約  $(\mathfrak{g}, K)$  加群は旗多様体上の既約な  $K$  同変ねじれとして実現される。さらに、Borel 部分代数から上記の誘導で得られる  $(\mathfrak{g}, K)$  加群と、 $K$  同変な標準ねじれ  $\mathcal{D}$  加群との対応が、1980 年代に Hecht–Miličić–Schmid–Wolf による双対定理として得られている。大島氏は、この双対定理をさらに一般化するために、 $(\mathfrak{g}, K)$  加群の誘導を等質空間上の  $(\mathfrak{g}, K)$  作用付きの層のコホモロジー空間に実現し、次に、離散的分解性の判定条件を旗多様体の幾何の言葉に移行し、これらの準備の下で、 $\mathcal{D}$  加群の手法を用いて分岐則の定理を証明した。

大島芳樹氏の博士論文は、重要な一般的設定で離散的な分岐則の公式を与えたものであり、 $\mathcal{D}$  加群の理論を分岐則の問題に徹底的に用いるという手法とあわせて、表現の分岐則の分野に、質の高い新たな知見を与えるものである。

よって、論文提出者 大島芳樹氏は、博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。