

論文審査の結果の要旨

氏名 奥田 隆幸

局所的な幾何構造が大域的な形をどの程度、束縛するか、あるいは、逆にどの程度の自由度を許すか、という問題は20世紀以来のリーマン幾何学における大きな潮流として発展してきた。幾何構造として、リーマン多様体ということは仮定せず、その代わりに局所対称性という幾何構造に注目して以下の問題を考える。

問題 A. 完備な局所対称空間はどのくらい豊富にあるか？

この問題を群論の問題として定式化することもできる。実際、任意の対称空間はあるリー群 G とその位数2の自己同型の固定部分群の開部分群 H によって、等質空間 G/H として表すことができ、逆にこのような等質空間は自然に対称空間となる (E.Cartan)。さらに、任意の完備な局所対称空間は等質空間 G/H の不連続群 Γ (すなわち G/H に固有不連続かつ自由に作用するような G の離散部分群) による商 $\Gamma \backslash G/H$ として表記することができる。

従って、問題 A は以下のように述べることができる。

問題 B. 対称空間 G/H の不連続群はどのくらい豊富にあるか？

この再定式化にみられるように、商多様体 $\Gamma \backslash G/H$ としての表示においては、等質空間 G/H が局所的な幾何構造を表し、不連続群 Γ が大域構造を統制するのである。

問題 B について、歴史的に多くの研究がなされているのは G が線型な半単純リー群、 H がコンパクトの場合である。この場合には等質空間 G/H は不変なリーマン計量に関する Levi-Civita 接続によってリーマン対称空間となり、リー群 G の捩じれのない任意の離散部分群は自動的に不連続群となる。例えば、任意の完備な双曲多様体は $\Gamma \backslash SO_0(n, 1)/SO(n)$ という表示を持つ。不連続群が豊富に存在するという方向の結果としては、数論的部分群の理論を用いることにより証明されたコンパクト局所リーマン対称空間の存在定理が知られている (A.Borel, 1962)。一方、変形できるほど豊富にはないということの定式化として、Selberg–Mostow–Margulis–Zimmer... と系譜が続く剛性定理や Margulis の算術性定理が知られている。

リーマン対称空間の場合を越えて、 H がコンパクトでない場合の不連続群の本格的な研究は1980年代後半の小林俊行の一連の論文に端を発する。 H がコンパクトでない一般の場合、 G の部分群 Γ が離散部分群であっても、 Γ は等質空間 G/H に不連続群として作用するとは限らず、問題 B の答えは等質空間 G/H の個性によって大きく変わる。小林俊行の先行研究を受けて、国際数学会の2000年には21世紀の数学の重要な新しいテーマの一つとして H がコンパクトでない場合の問題 B が紹介された (Margulis 2000, アメリカ数学会)。現在では、このテーマは、リー群論・不連続群論・非可換エルゴード理論・ユニタリ表現論など、さまざまな数学と関わりをもって、深い研究が活発に行われている。

論文提出者の奥田氏は、半単純対称空間 X に対する問題 B に取り組み、以下の 2 つの条件が同値であることを証明した。

- (1) X に等長な $SL(2, \mathbb{R})$ -作用がある
- (2) 曲面群が X の不連続群になりうる。

(2) \Rightarrow (1) は、 X が対称空間ではない場合には反例が最近見つかったという事実からも察せられるように、証明は微妙な要素を含む。奥田氏の証明のアイディアは、不定値計量をもつ等質空間への作用に対する Kobayashi(1989), Benoist(1996) の固有不連続性の判定条件を用いて、不連続群の問題を冪零随伴軌道の問題に置き換え、次に Dynkin–Kostant–Sekiguchi の定理を援用することで、(1) が成り立つかどうかを判断する組み合わせ論的なアルゴリズムを与えるという構想に基づくものである。このアルゴリズムは、計算が効率的であり、それによって奥田氏は曲面群が現れるような半単純対称空間を完全に分類した。

奥田氏の博士論文は総計 200 頁からなるが、その主要部である上述の分類結果は微分幾何において最も権威のある国際学術誌である *Journal of Differential Geometry* に単著論文として、掲載が決まっている。さらに、分類以上の内容として、コンパクト商をもたないような新たな対称空間の例を発見した。

また、上記のアルゴリズムの応用として、奥田氏は極小複素冪零軌道がどのように実リー環と交わるかという問題の研究も行ったが、これは、現在の無限次元表現論の重要な対象である極小ユニタリ表現の研究と接点のある基礎的な結果である。

奥田氏の博士論文の最後の章は、「球面のデザイン」に関するもので、これは、前半部分の不連続群の理論とは異なるテーマである。奥田氏は、ファイバーと底空間のデザインから全空間のデザインを構成するというアイディアを用い、3次元球面において「コストの低いデザイン」の構成法を見出した。奥田氏の構成は自然で簡単なものであることから、デザインの理論の今後の発展を促すきっかけになること期待される。

以上のように、当該論文は不連続群と組み合わせ論に新しい知見を与えたものであり、論文提出者 奥田隆幸氏は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。