

## 論文審査の結果の要旨

氏名 國谷 紀良

國谷紀良氏の学位申請論文「非均質性を備える様々な感染症モデルの数理解析」は2部4章からなり、第一部では多種ホスト個体群における感染症流行モデルを扱い、第二部では時間的な変動環境における感染症流行モデルを考察している。

第一部第1章は多種ホストにおけるSVIR型感染症モデルを考察している。ここでSVIRモデルはホスト個体群が感受性、ワクチン接種、感染性、免疫の4状態に分割されているモデルであり、ワクチン接種による免疫誘導は完全ではなく、低下した感受性を維持すると仮定されている。このようなモデルは、ワクチンによる免疫誘導が不完全であるが、実際に感染が起きた場合には、そこからの回復は生涯免疫を誘導するような感染症のモデルと考えられる。このモデルに対して、國谷氏は流行の基本再生産数 $R_0$ を計算して、それが1以下であれば、感染のない定常状態が大域安定であり、 $R_0$ が1をこえると、ただ一つのエンデミックな定常解が分岐して、それが大域安定になることを示した。この大域安定性の証明は技術的に難しいが、國谷氏は適切なリアプノフ関数を構成して、グラフ理論的な考察によってその軌道に沿った微分の符号を決定することに成功している。この結果は不完全ワクチンによるホスト個体群の部分免疫化がおこなわれた状態においても、基本再生産数 $R_0$ がシステムの挙動を大域的にも完全に決定していることを示した。

第一部第2章ではホスト個体群の年齢構造を考慮したSIR型感染症の閾値現象を検討している。年齢構造化SIR感染症モデルは20年以上前から研究されてきたが、現実的に妥当な条件のもとでエンデミック定常解の一意性と大域安定性が示されうるかどうか、長年にわたり未解決な問題であった。國谷氏はこの問題に対して、偏微分方程式で表される基本モデルを離散化して常微分方程式系へ還元するという手法で検討をおこなった。その結果、得られた常微分方程式モデルに関しては、流行の基本再生産数 $R_0$ が1以下であれば、感染のない定常状態が大域安定であり、 $R_0$ が1をこえると、ただ一つのエンデミックな定常解が分岐して、それが大域安定になるという閾値原理が、リアプノフ関数の手法によって証明された。また数値計算によって、離散化常微分方程式系の基本再生産数が、年齢分割を細かくすれば、偏微分方程式系から直接得られる基本再生産数をよく近似することを確認した。この結果は直ちに偏微分方程式系におけるエンデミック定常解の大域安定性を意味するものではないが、数値計算上は非常に似た挙動を示すことから、実用的なモデルにおいては、大域安定

性が成り立つのではないかという示唆を与えている。

第二部第 3 章では、パラメータが時間依存であるような SEIR 型感染症流行モデルにおける感染症流行の絶滅条件と持続的な流行（パーマネンス）条件を検討している。ここで SEIR モデルはホスト個体群が感受性、潜伏期、感染性、免疫の 4 状態に分割されているモデルであり、各状態における死亡率格差はないものと想定されている。このようなモデルは感染性が季節変動するような感染症の長期的流行を記述するものと考えられる。もしもパラメータが全て同一の時間周期をもつ周期関数であるならば、すでに國谷氏が共同研究者の中田行彦氏と明らかにしたように、流行の基本再生産数  $R_0$  が定義されて、 $R_0$  が 1 以下であるならば、流行は自然に根絶されるが、 $R_0$  が 1 を超えれば、エンデミックな周期解が少なくとも一つ存在して、しかも感染個体群密度の時間的な下極限は初期条件に依存しない正数によって下から評価されるという意味で、一様パーシステンスであることがしめされる。本論文では、國谷氏は周期性よりも一般的な時間変動性のもとで、感染症が絶滅するための十分条件、また一様パーシステンスとなるための条件を与えた。この条件はこれまで得られていた条件を改善するとともに、定常環境においては通常の閾値条件に一致する。國谷氏の研究は、周期性をこえる時間変動性のもとでの閾値条件の研究の方向性に対して、重要な示唆を与えるものであると考えられる。

第二部第 4 章は年齢構造をもつホスト個体群における SIS 感染症モデルを周期的環境のもとで考察している。SIS 感染症は感染からの回復が免疫性を誘導せず、ただちに感受性となるような感染症のモデルである。周期的環境における流行の基本再生産数  $R_0$  の定義は 2006 年に Bacaer and Guernaoui によって与えられ、それが侵入の閾値条件になることは知られているが、定常環境の場合のように、エンデミックな解の存在と安定性に条件になるかどうかは、年齢構造化モデルにおいてはまだまったく知られていなかった。國谷氏は、このエンデミックな周期解の存在問題を時間周期的なベクトル値関数の空間における不動点問題に変形することによって、ある正積分作用素のスペクトル半径が閾値として作用して、それが 1 を超える場合には、現実的な条件のもとでエンデミックな周期解が一意的に存在することを示した。この閾値パラメータは、ホストが人口学的定常状態にある場合は、周期系の基本再生産数  $R_0$  に一致するが、ホスト人口のマルサスパラメータが正であれば、 $R_0$  よりも小さく、逆にマルサスパラメータが負であれば、 $R_0$  よりも大きい。この結果は、時間周期的な年齢構造化感染症モデルにおいてエンデミック閾値条件を初めて示し、かつ基本再生産数による侵入条件との関係明らかにしたものとして高く評価できる。

以上の点から論文提出者 國谷 紀良 は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。