

## 論文審査の結果の要旨

氏名 古場 一

大気や海洋は地球表面上の大規模流体であるので、地球の自転による回転の影響、成層や熱（重力、浮力）の影響を強く受けると考えられている。流体の運動は非圧縮性粘性流体に対するナビエ・ストークス方程式を基礎とするが、これに熱の影響を考慮したブシネスク近似を用いて導出されたブシネスク方程式に回転を考慮したナビエ・ストークス-ブシネスク方程式（地球流体方程式）で記述されていると考えられている。この系には回転のパラメータと成層のパラメータ（浮力（重力）パラメータ）を含んでいる。

このような方程式系に対して零解をはじめとする定常解の安定性、不安定性を解析することは単に数学的問題というより、地球流体力学の根源的問題であり、数値計算をはじめさまざまな方法で研究されている。しかし、厳密に数学的意味での安定性を証明することは、方程式系の複雑さのために容易ではない。従来は回転の効果、成層の効果のどちらかの効果だけの問題のみ扱われ、これらの効果がすべて入っているモデルは、数学解析で取り扱われていなかった。

論文提出者はこの難問に対してその問題の本質を見出し、さまざまな安定性定理を確立した。特に半空間のエックマン層の安定性をレイノルズ数が小な場合に示すなど、従来の方法では証明できなかった状況に対して、安定性の厳密な証明を与えたのは画期的であった。

一般的に非線形方程式の解の安定性を示すには、元の方程式を線形化した方程式の具体的な解の表示や解の評価が必要である。また解の安定性を調べるためには、方程式の主要部となる線形作用素のスペクトル解析を行う必要がある。しかし、ブシネスク型方程式に現れる主となる線形作用素は一般には自己共役作用素ではなく、また全空間の問題であっても、線形作用素をフーリエ変換等を用いて具体的に表示して解析することは難しい。

本論文では、方程式の構造とエネルギー不等式から必要な評価を導出し、一般的な設定の下での初期値問題の解の構成やまた安定性を論じた。本論文の手法を用いることにより、エネルギー不等式を持つさまざまな非線形方程式や線形方程式の解の漸近安定性を示すことが可能になった。

本論文の内容は

1. 一般的な非線形項を持つ空間非斉次ブシネスク型方程式の時間局所解の構成およびエネルギー不等式を満たすブシネスク型方程式の時間大域的な解の構成と、その解の安定性解析（強解（滑らかな解）の構成と強解の非線形安定性解析）

2. 線形方程式のエネルギー不等式を満たす解の漸近安定性解析（解析  $C_0$  半群の安定性解析）
3. 熱や政争の影響を考慮したエクマン境界層の非線形安定性解析（弱解（滑らかかどうかわからない解）の構成と弱解の非線形安定性解析）

を主とし、さらに地球流体方程式モデルの導出についても触れている。

最初のテーマについては、初期値がある程度の滑らかさを持ち主要部となる線形作用素が解析半群を生成すれば、時間局所的な強解を持つことを示し、さらに初期値の小さくエネルギー不等式を満たせば時間大域的に一意な強解を持つことを示した。線形作用素が漸近安定な  $C_0$  半群を生成すればその時間大域的解も漸近安定になることも示した。2 番目のテーマで扱われる線形安定性解析と本非線形安定性解析を組み合わせることで、例えば非圧縮性流体方程式の定常解の安定性解析が可能となる。定常解の構造や、そこでの線形化作用素が具体的にわからなくても、小さな定常解の安定性を示すことが可能になる。

2 番目のテーマに対しては解析半群を生成する線形作用素を主要部とする線形方程式の解はエネルギー不等式を満たせば技術的な仮定のもと漸近安定であることを示した。この線形安定性解析はよく知られている安定性解析の手法に加え、(i) 線形作用素とその共役線形作用素とエネルギー不等式を利用した安定性解析、(ii) 接方向の微分演算子とエネルギー不等式を利用した安定性解析、(iii) 作用素の最大  $L^p$  正則性とエネルギー不等式を利用した安定性解析、といった新しい 3 手法を確立した。変数粘性係数を持つストークス作用素、オセーン作用素、ストークス・コリオリ・オセーン型作用素、エクマン型作用素、ブシネスク型作用素を主部とする方程式の解の漸近安定性に対して応用が可能である。

3 番目のテーマでは、地球流体方程式の係数（パラメータ）がエネルギー不等式を成立させる範囲であるとき、熱や成層を考慮したエクマン型定常解は  $L^2$  の意味で漸近安定である。具体的には半空間で、エクマン層が任意の摂動を初期値とする時間無限大において減衰する弱解が少なくとも 1 つ存在することを示した。しかも時間が充分経過すればこの弱解が滑らかになることも示している。これらはナビエ・ストークス方程式の結果の自然な拡張である。論文提出者はヒルベルト空間を巧みに用い、他の手法では示せなかったり示すことが困難な問題に対して、解の安定性を示す手法を確立した。

このように柔軟で強力な安定性解析の手法を確立した論文提出者の古場一氏は、博士（数理学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。