論文の内容の要旨

論文題目　Symmetrized Max-Plus Algebra and Ultradiscrete sine-Gordon Equation

（対称Max-Plus代数と超離散sine-Gordon方程式）

氏名　近藤健一

超離散可積分系とは独立変数は $\mathbb{Z}$、従属変数は max-plus 代数 $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ に値をとる可積分系のことである。最も有名な超離散可積分系としては箱玉系 [11]

$$U_n^{t+1} = \min\left[1 - U_n^t, \sum_{k=-\infty}^{n-1} U_k^t - \sum_{k=-\infty}^{n-1} U_k^{t+1}\right] \tag{1}$$

があげられる。ここで $S_n^t = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{t} U_k^l$ を定義すると、S_n^t は

$$S_{n+1}^{t+1} + S_n^{t-1} = \max\left[S_{n+1}^{t-1} + S_n^{t+1} - 1, S_n^t + S_{n+1}^t\right] \tag{2}$$

を満たすが、これは離散 KdV 方程式

$$(1+\delta)\sigma_{n+1}^{t+1}\sigma_n^{t-1} = \delta\sigma_{n+1}^{t-1}\sigma_n^{t+1} + \sigma_n^t\sigma_{n+1}^t \tag{3}$$

から超離散化という極限操作によって得られることが知られている [12]。

$\mathbb{R}_{\max}$ には減算、あるいは負の要素が存在しないため、離散系において減算が存在する場合の超離散化が長らく問題となっている。これを解決するための手法もいくつか提案されているが、そのうち対称 max-plus 代数 [10, 1] $u\mathbb{R}$ を用いたものに注目する。$u\mathbb{R}$ は、$\mathbb{N}^2$ から $\mathbb{Z}$ を構成するのとおよそ同様の手法によって $\mathbb{R}_{\max}^2$ から構成される。$u\mathbb{R}$ 上では線型代数が可能であり [10, 1]、特に $u\mathbb{R}$ 上の 2×2 行列を用いて超離散複素数 $u\mathbb{C}$ を定義することが可能である。行列値関数を含む場合の $u\mathbb{R}$ を用いた超離散化は [3] においてまとめられており、これは次のように表される。すなわち、$\mathbb{R}$ 上の N 次行列に値をとる関数 f, g, h が、超離散化によって $u\mathbb{R}$ 上の N 次行列に値をとる関数 F, G, H に移るとき、

$$f = g + h \Longrightarrow F \nabla G \oplus H \tag{4}$$

および

$$f = gh \Longrightarrow F \nabla G \otimes H \tag{5}$$

が成り立つ。ここで $\oplus$ は $\mathbb{R}_{\max}$ における max 演算を拡張したもの、$\otimes$ は $+$ 演算を拡張したもの、∇ は $=$ を拡張したものに相当する。減算を含む場合の超離散化としては符号変数付超離散化 [8] にも注目すべきであるが、u$\mathbb{R}$ を用いることによって同等の操作がより簡潔に可能となることが分かる。

離散 sine-Gordon 方程式 [4, 2]

$$(1-\delta)\tau_l^m\tau_{l+1}^{m+1} = \tau_{l+1}^m\tau_l^{m+1} - \delta\sigma_{l+1}^m\sigma_l^{m+1} \tag{6a}$$

$$(1-\delta)\sigma_l^m\sigma_{l+1}^{m+1} = \sigma_{l+1}^m\sigma_l^{m+1} - \delta\tau_{l+1}^m\tau_l^{m+1} \tag{6b}$$

は基本的なソリトン解に減算や複素数が含まれるため、長らく超離散化されてこなかった。近年、 [5, 6] によって超離散化が行われたが、そこでは τ_l^m のみを含む三重線型方程式を利用することで減算が避けられている。今回、本論文においては、u$\mathbb{R}$ を用いた超離散化を利用することによって新たに超離散 sine-Gordon 方程式

$$T_l^m T_{l+1}^{m+1} \ \nabla\ T_{l+1}^m T_l^{m+1} \ominus DS_{l+1}^m S_l^{m+1} \tag{7a}$$

$$S_l^m S_{l+1}^{m+1} \ \nabla\ S_{l+1}^m S_l^{m+1} \ominus DT_{l+1}^m T_l^{m+1} \tag{7b}$$

を導いた。ここで $\ominus$ は $-$ 演算の超離散版に相当し、また $\otimes$ の表記は省略されている。この方程式においては、方程式そのものの形だけではなく、（超離散）複素数を含む進行波解や kink-antikink 解などについても離散 sine-Gordon 方程式との間に極めて明確な対応が見られることが分かる。

さて、ここ二十年ほどの間、非可換可積分系への注目が次第に高まっている。連続系については比較的古くから非可換系の存在が知られているようだが、離散系については非可換離散 KP 方程式によって近年おそらく初めてその存在が明らかにされた [9, 7]。この流れを踏まえ、本論文においては非可換離散 sine-Gordon 方程式

$$w_{l+1}^{m+1}\left(w_l^{m+1}\right)^{-1} - w_{l+1}^m\left(w_l^m\right)^{-1} + ab\left(v_l^{m+1}\left(w_l^m\right)^{-1} - w_{l+1}^{m+1}\left(v_{l+1}^m\right)^{-1}\right) = 0 \tag{8a}$$

$$v_{l+1}^{m+1}\left(v_l^{m+1}\right)^{-1} - v_{l+1}^m\left(v_l^m\right)^{-1} + ab\left(w_l^{m+1}\left(v_l^m\right)^{-1} - v_{l+1}^{m+1}\left(w_{l+1}^m\right)^{-1}\right) = 0 \tag{8b}$$

を導いた。これは線型系の両立条件として得られ、非可換離散 KP 方程式を含む他の可積分系との関係も明らかにされる。また複数の単純な解から複雑な解を構成する Darboux 変換を定義することによって、多重ソリトン解を導いた。最後に、u$\mathbb{R}$ を用いた超離散化によって非可換超離散 sine-Gordon 方程式

$$W_{l+1}^{m+1}\left(W_l^{m+1}\right)^{-1} \ominus W_{l+1}^m\left(W_l^m\right)^{-1} \oplus AB\left(V_l^{m+1}\left(W_l^m\right)^{-1} \ominus W_{l+1}^{m+1}\left(V_{l+1}^m\right)^{-1}\right) \nabla -\infty \tag{9a}$$

$$V_{l+1}^{m+1}\left(V_l^{m+1}\right)^{-1} \ominus V_{l+1}^m\left(V_l^m\right)^{-1} \oplus AB\left(W_l^{m+1}\left(V_l^m\right)^{-1} \ominus V_{l+1}^{m+1}\left(W_{l+1}^m\right)^{-1}\right) \nabla -\infty \tag{9b}$$

およびその 1 ソリトン解、2 ソリトン解を導いた。これによって、可換および非可換の場合について、連続、離散、超離散の各 sine-Gordon 方程式が揃ったことになる。

参考文献

[1] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.-P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. Wiley, 1992.

[2] E. Date, M. Jimbo, and T. Miwa. Method for generating discrete soliton equations. III. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 52:388–393, 1983.

[3] B. De Schutter and B. De Moor. The QR decomposition and the singular value decomposition in the symmetrized max-plus algebra revisited. *SIAM Review*, 44(3):417–454, 2002.

[4] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations III; discrete sine-Gordon equation. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 43:2079–2086, 1977.

[5] S. Isojima, M. Murata, A. Nobe, and J. Satsuma. An ultradiscretization of the sine-Gordon equation. *Phys. Lett. A*, 331:378–386, 2004.

[6] S. Isojima and J. Satsuma. On oscillatory solutions of the ultradiscrete sine-Gordon equation. *JSIAM Letters*, 1:25–27, 2009.

[7] K. Kondo. Sato-theoretic construction of solutions to noncommutative integrable systems. *Phys. Lett. A*, 375:488–492, 2011.

[8] N. Mimura, S. Isojima, M. Murata, and J. Satsuma. Singularity confinement test for ultradiscrete equations with parity variables. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42:315206, 2009.

[9] J. J. C. Nimmo. On a non-Abelian Hirota–Miwa equation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:5053–5065, 2006.

[10] M. Plus. Linear systems in (max, +) algebra. In *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 151–156, 1990.

[11] D. Takahashi and J. Satsuma. A soliton cellular automaton. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 59:3514–3519, 1990.

[12] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma. From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure. *Phys. Rev. Lett.*, 76:3247–3250, 1996.