論文審査の結果の要旨

氏　名　　近 藤 健 一

超離散化とは，差分方程式から極限操作によって区分線型方程式を構成する手法である．区分線型方程式は，整数あるいは適当な有限集合上の力学系とみることによって Cellular Automaton（CA）とみなすことができる．与えられた差分方程式が微分方程式のしたがって，超離散化とはもとの方程式の解の極限が CA の解を与え，通常は離散的な性質のために解くことが困難な CA の初期値問題や大域的な性質がわかる．この手法は基本的にはまず log をとるため，ソリトン解のように解の符号が一定のものではうまくゆくが，解が強く振動するものや本質的に複素数のものではうまく行かないことが多い．Sine-Gordon 方程式は通常の方法ではうまく行かない典型例である．そのため，正負の値を振動的にとる解に対する拡張された超離散化の手法が，オーストラリアのグループや，日本では早稲田大学，九州大学のグループなどから数多く提案されてきた．しかしながら，そのほとんどは限定的な結果であり，普遍性のある結果は，青山学院大学のグループの提案した符号付超離散化と呼ばれる手法だけである．この手法は，符号関数と step 関数をうまく用いた解析的な手法であり，超離散化の自然な拡張になっている．

これに対して，近藤氏は代数的な普遍性の高い手法を提案した．もともとの超離散化における極限操作は，系を Max-Plus 代数で表現することに対応するが，近藤氏はこれを対称 Max-Plus 代数の上で表現すれば，こうした振動の問題が解決できることを見出した．対称 Max-Plus 代数は，Max-Plus 代数にいくつかの新しい元と演算を加え拡張した代数であり，実数体などでは逆元の存在しない Max 演算に，逆元の類似物を定義することにより，負の値に対する log 演算に相当する代数的な関係を得ることができる．さらにこの手法の重要な点は，複素数値解に対しても適用可能であることで，これは符号付超離散化の手法では取り扱いが難しい点である．

　本論文では，この手法を振動解をもつ sine-Gordon 方程式に応用している．Sine-Gordon 方程式は，その可積分な離散化さえかなり困難な系であり，解についても未解決の問題も多いが，本論文では，非自明な 2 ソリトン解などを構成した．その上で対称 Max-Plus 代数を用いた超離散化を行い，実際に，kink-antikink 解など多くの特徴的な解を再現できるなど有用性を示した．

　論文の後半では，ここ数年研究の進んできた可積分方程式系の非可換化の問題がこの系に対して考察されている．ここで，非可換化とは従属変数の非可換である．可積分方程式の非可換化は，J. C. Nimmo らによって，quasi-determinant を用いて，τ 関数に対す

る双線形恒等式の形で取り扱われてきた．離散 KP 方程式や dKdV 方程式に関しては，非可換方程式系に対するソリトン解などが議論されてきたが，離散 sine-Gordon 方程式については考えられてこなかった．本論文では，まず，線形な Lax 形式の両立条件を用いて，離散 sine-Gordon 方程式を連立方程式の形で非可換化し，非可換離散 sine-Gordon 方程式を導いた．この導出法により，この方程式と非可換離散 KP 方程式との関係も明らかになっている．その上で真空解と単純なソリトン解を具体的に構成し，単純な解からより複雑な解を作る一般的手法である Darboux 変換を非可換な場合に拡張し，多重ソリトン解を構成している．そして，非可換離散 sine-Gordon 方程式を，対称 Max-Plus 代数上で表現することで非可換超離散 sine-Gordon 方程式を導いた．超離散系に対して，具体的に非可換方程式を構成した最初の例である．その上で，この超離散系の 1 ソリトン解と 2 ソリトン解を具体的に構成することに成功している．

以上のように，超離散化を一般化する手法を構築し，さらに非可換な超離散方程式の最初の例を示したことは高く評価できる．よって，本論文提出者近藤健一は博士(数理科学) の学位を受けるに十分な資格があるものと認める．