# 論文の内容の要旨

論文題目：Asymptotically complex hyperbolic Einstein metrics and CR geometry
（漸近的複素双曲アインシュタイン計量と CR 幾何学）

氏　　名：松本佳彦

本論文では，漸近的複素双曲計量（ACH 計量）について，無限遠境界における Einstein 方程式の漸近解を決定する．また，この漸近解に基づき，一般の非退化な partially integrable CR 多様体に対し，CR オブストラクション・テンソル $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ と全 CR Q 曲率 $\overline{Q}$ を構成する．前者は局所 CR 不変量，後者は大域的な CR 不変量である．さらに，$\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ が，実は partially integrable CR 構造の変形に関する $\overline{Q}$ の変分として現れることを明らかにする．

CR 不変性をもつ対象を構成するために Einstein 方程式を考察するというアイディアは，Fefferman によるものである．Fefferman は，複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の有界強擬凸領域における複素 Monge–Ampère 方程式のゼロ境界値問題を取り扱い，その漸近解の低次の項を任意の境界定義関数を用いて容易に表示できることを発見した．よく知られているように，複素 Monge–Ampère 方程式とは Kähler-Einstein 計量のポテンシャル関数に対する方程式である．このゼロ境界値問題については，真の解がただひとつ存在することが Cheng–Yau によって示されており，またその解が一般には対数項を含む漸近展開を持つことが Lee–Melrose により知られている．Fefferman の仕事に続いて Graham は，Lee–Melrose の漸近展開について，境界定義関数から局所的に定まる部分とそうでない部分を完全に決定した．以上の議論のひとつの応用が，有界強擬凸領域の Bergman 核の対角線への制限 $B(z,\overline{z})$ に関する，境界における漸近展開の特異性の記述である（Fefferman，Bailey–Eastwood–Graham，平地）．

現在 ACH 計量と呼ばれているものを初めて考察したのは Epstein–Melrose–Mendoza であった．彼らが目的としたのは有界強擬凸領域の Bergman 計量の定めるラプラシアンのレゾルヴェントの研究であるが，その際に重要だった Bergman 計量の性質は，その境界における特異性がある意味でコントロールされており，特異性の主要部が境界の CR 構造を復元することである．主要部を除く高次の項は問題にはならず，Epstein–Melrose–Mendoza の議論はより広いクラスの計量に適用される．このクラスに属する計量が ACH 計量である．具体的な ACH 計量の定義の細部についてはこれを取り扱う論文ごとに違いがみられるが，Epstein–Melrose–Mendoza は，まず境界付き実多様体に対する $\Theta$ 構造の概念を定義し，それに付随して定められる $\Theta$ 接バンドルと呼ばれる実ベクトルバンドルのファイバー計量に対して，それが ACH 計量となるための条件を定式化している．本論文で採用するのもこの定義である．一般に，滑らかな境界をもつ複素多様体は，自然な $\Theta$ 構造を備えている．Bergman 計量と同様のタイプの Kähler 計量はこの $\Theta$ 構造に関する ACH 計量とみなすことができ，また，境界上の自然な CR 構造を誘導する．

Kähler 計量ではなく ACH 計量を考えることの利点のひとつが，境界上の CR 構造として，古典的な可積分 CR 構造だけではなく，partially integrable な CR 構造をも考えられるようになることである．$2n+1$ 次元可微分多様体 $M$ 上の概 CR 構造 $T^{1,0}M$ が partially integrable であるとは，

$$[C^\infty(M, T^{1,0}M), C^\infty(M, T^{1,0}M)] \subset C^\infty(M, T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M})$$

を満たすことをいう．可積分 CR 構造は放物幾何という名前で近年研究されている一群の幾何構造に属するが，partially integrable な CR 構造は，その範囲内での可積分 CR 構造の拡張になっている．「実超曲面に可積分でない partially integrable CR 構造が自然に定まる」という幾何的状況は，（無限遠境界として実超曲面が現れる ACH 計量の場合を除き）知られていないが，可積分でない partially integrable CR 構造の例は，可積分な CR 構造を変形することによって容易に，たくさん得られる．そして本論文における CR $Q$ 曲率の研究は，partially integrable CR 構造が，少なくとも，可積分な CR 構造の変形として重要であることを示唆している．

本論文は 4 つの章からなる．第 1 章は，背景および概要，主定理の説明である．第 2 章において，partially integrable CR 構造，境界付き多様体の $\Theta$ 構造と ACH 計量，Bergman タイプの計量の ACH 計量としての解釈について，以下の議論で必要となる基礎的事項を準備する．第 6 節から始まる第 3 章で，まず ACH 計量に対する Einstein 方程式の近似解の構成を与える次の定理を証明する（定理 2.3）．

<u>定理</u>. $(\overline{X}, [\Theta])$ を $2n+2$ 次元 $\Theta$ 多様体，$T^{1,0}M$ をそれに適合する境界 $M = \partial X$ 上の partially integrable CR 構造とする．滑らかな境界定義関数 $\rho \in C^\infty(\overline{X})$ を任意にとる．そのとき，$C^\infty$ 級

の even な ACH 計量 $g$ で，$T^{1,0}M$ を誘導し，その Ricci テンソルおよびスカラー曲率が

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}(n+2)g + O(\rho^{2n+2}), \qquad \mathrm{Scal} = -(n+1)(n+2)g + O(\rho^{2n+4}) \tag{†}$$

を満たすようなものが存在する（ただし，第 1 式における $O(\rho^{2n+2})$ は，$\Theta$ テンソルとしてのオーダーを示している）．そのような $g$ は，$\overline{X}$ の境界の各点を固定する $\Theta$ 微分同相写像の作用を除き，$O(\rho^{2n+2})$ かつトレースが $O(\rho^{2n+4})$ であるような $\Theta$ テンソルを法として一意的である．

ACH 計量に対してはポテンシャル関数の概念はないので，証明は直接的である．すなわち，計量テンソルに対する Einstein 方程式をそのままの形で考えて，境界定義関数 $\rho$ に関する Taylor 展開の係数を逐次的に決定することにより行われる．Einstein 方程式には微分同相不変性があるため，ACH 計量に正規形の概念を導入することになるが，こうして得られる正規形 ACH 計量に対する方程式は過剰決定系である．この方程式に解が存在するのは，Ricci テンソルの成分のあいだに存在する Bianchi の恒等式のためであることが，証明の中で明らかになる．

$C^\infty$ 級の解の存在に対する障害が，(†) に現れるオーダーで，テンソルの形で生じる．これは $\mathrm{Sym}^2(T^{1,0}M)^*$ のセクションであり，その構成から，適切な重みをつければ境界の CR 構造のみに依存する量になることがわかる．これを $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ と書き，CR オブストラクション・テンソルと呼ぶ．$\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ が現れるオーダーは，有界強擬凸領域上の複素 Monge–Ampère 方程式に対する同様の障害が現れるオーダーよりも早い．すなわち，可積分 CR 構造に対しては常に $\mathcal{O}_{\alpha\beta} = 0$ である（定理 2.8）．第 7 節で，$\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ の持つ性質がさらに詳しく議論される．

第 8 節では，ACH 計量の漸近展開に対数項を許した場合を調べる．このとき Einstein 方程式が無限次のオーダーで成立するような計量を構成するためには，境界 $M$ 上で，ある偏微分方程式を解く必要があることがわかる．この方程式が一般に大域的な解を持つか否かはわからないが，Cauchy–Kovalevskaya の定理によれば，$M$ 上の任意に与えられた 1 点において形式的冪級数解が存在する．このことから次の定理が従う（定理 2.11）．

<u>定理</u>**.** $(\overline{X}, [\Theta])$，$T^{1,0}M$ を先の定理と同じものとする．そのとき，任意の点 $p \in M$ について，対数特異性を持つ ACH 計量であって，Ricci テンソルの境界における漸近展開が点 $p$ において無限次のオーダーで $-\frac{1}{2}(n+2)g$ に等しいようなものが存在する．

続く第 4 章では，まず第 9 節で，一般の $C^\infty$ 級 ACH 計量 $g$ について，ラプラシアン $\Delta_g$ に関するある Dirichlet 問題を考察する．これに関連して $M$ 上の微分作用素 $P_k$ を得る（定理 2.13）．

<u>定理</u>**.** $(\overline{X}, [\Theta])$ を $2n+2$ 次元 $\Theta$ 多様体とし，$g$ を even な $C^\infty$ 級 ACH 計量とする．この $g$ が誘導する partially integrable CR 構造を $T^{1,0}M$ とし，接触形式 $\theta$ を固定して，$\rho$ を $\theta$ に対する任意の許容境界定義関数とする．さらに，$k$ を正の整数とする．そのとき，任意の実数値関数

$f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$\left(\Delta_g - \frac{1}{4}((n+1)^2 - k^2)\right)u = O(\rho^\infty)$$

の解であって

$$u = \rho^{n+1-k}F + \rho^{n+1+k}\log\rho\cdot G, \qquad F, G \in C^\infty(\overline{X}), \qquad F|_{\partial X} = f$$

を満たすものが存在する．$F$ は $O(\rho^{2k})$ を法として，$G$ は $O(\rho^\infty)$ を法として，それぞれ一意的である．さらに，$g$ と $\theta$ から定まる微分作用素 $P_k$ であって，$G$ の境界値を与えるようなものが存在する：

$$G|_M = -2c_kP_kf, \qquad c_k = \frac{(-1)^k}{k!\,(k-1)!}.$$

微分作用素 $P_k$ の主シンボルは，サブラプラシアンの $k$ 乗 $\Delta_b^k$ のそれに一致する．

この定理で得られる $P_k$ のうち，最も重要なのは $P_{n+1}$ である．容易にわかるようにこの作用素は $P_{n+1}1 = 0$ という性質を持ち，その性質に基づいて，$M$ 上の関数 $Q$ が得られる．$Q$ の定義は第 9 節で証明される事実に基づく形で第 2.4 節に与えられている．

以上の構成が，第 10 節で (†) の解となっているような ACH 計量 $g$ に適用される．計量 $g$ そのものは境界の partially integrable CR 構造 $T^{1,0}M$ のみからでは完全には決まらないが，その任意性が第 9 節の構成に及ぼす影響を調べることにより，次の定理が得られる（定理 2.16）.

定理. $(\overline{X}, [\Theta])$ を $2n+2$ 次元 $\Theta$ 多様体とし，$g$ を (†) を満たす even な $C^\infty$ 級 ACH 計量とする．そのとき，$k \le n+1$ に対する微分作用素 $P_k$，および関数 $Q$ は，境界の partially integrable CR 構造 $T^{1,0}M$ と接触形式 $\theta$ のみから定まる．

この定理で得られる関数 $Q$ を CR Q 曲率と呼ぶ．$Q$ 自体は接触形式 $\theta$ に依存して定まる量だが，$M$ がコンパクトな場合，$\theta\wedge(d\theta)^n$ に関するその積分 $\overline{\mathrm{Q}}$ は $\theta$ の取り方には依存しない．これが全 CR Q 曲率である．

最後に，CR オブストラクション・テンソル $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ と全 CR Q 曲率 $\overline{\mathrm{Q}}$ の関係を証明する．

定理. $(M, T^{1,0}M)$ を $2n+1$ 次元のコンパクトな非退化 partially integrable CR 多様体とし，$\hat{T}_t^{1,0}$ を，$t=0$ において $T^{1,0}M$ を通るような，一定の接触分布上の partially integrable CR 構造の族，$\psi_{\alpha\beta}$ をその $t=0$ における微分とする．そのとき，各 $\hat{T}_t^{1,0}$ に対する全 CR Q 曲率の $t=0$ における微分は，$T^{1,0}M$ の CR オブストラクション・テンソル $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ を用いて次式で与えられる：

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{Q}}_t\right)\bigg|_{t=0} = \frac{8\cdot(-1)^n\cdot n!\,(n+1)!}{n+2}\int_M \mathrm{Re}(\mathcal{O}^{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}).$$