論文の内容の要旨

論文題目： Hibi toric varieties and mirror symmetry
（日比トーリック多様体とミラー対称性）

氏名： 三浦 真人

日比トーリック多様体とは有限半順序集合から定まる特殊な射影トーリック多様体である. 本論文では, この日比トーリック多様体の性質を組合せ論を用いて記述し, そのミラー対称性への応用を与えた. 主要な関心は, ゴレンシュタイン日比トーリック多様体の一般的な超曲面完全交叉に退化するような, ピカール数 1 の滑らかな複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性である. そのようなカラビ・ヤウ多様体の例として, 後述する $\mathbf{\Sigma}(1^9)$ と $(G(2,5)^2)$ のミラー対称性を調べた.

1 背景

複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体の具体例に対してミラー多様体を構成し, これを調べていくという研究は, より一般的なミラー構成を目指す幾つかのプログラムとともに, ミラー対称性の研究の発展・深化に大きく貢献してきた. 理論物理の共形場理論との関わりから最初に発見された 5 次超曲面カラビ・ヤウ多様体とそのミラー多様体 [GP] は, 現在でもミラー対称性の最も基本的な具体例として様々な方面からの研究を先導している. 射影空間やゴレンシュタイン重み付き射影空間, およびそれらの直積の超曲面完全交叉カラビ・ヤウ多様体がこれに続く例である. さらにバチレフ・ボリゾフによってミラー多様体が構成されたゴレンシュタイン・トーリック・ファノ多様体の超曲面 [Bat] および超曲面完全交叉 [Bor] カラビ・ヤウ多様体は, ミラー双対に関して閉じたクラスとして非常に豊富な例を含むものであった.

現在, バチレフ・ボリゾフの例を超えた辺境に, 新たなミラー対称性の具体例を求めようという幾つかの試みがあり, 本論文の研究はその流れを汲むものである. 特に, コニフォルド転移を用いたミラー構成法 [BCFKvS1] は, まだ予想の段階ではあるが, グラスマン多様体や A 型旗多様体 [BCFKvS2] の超曲面完全交叉カラビ・ヤウ多様体, 4 次元ゴレンシュタイン・トーリック・ファノ

多様体の端末的超曲面カラビ・ヤウ多様体の変形非特異化 [BK] などに対してもミラー対称性の議論を可能にした系統的な構成法である. この範囲で新たに登場する例として, グラスマン多様体 $G(2,7)$ の超平面完全交叉カラビ・ヤウ多様体 $G(2,7)(1^7)$ があり, 非自明なフーリエ・向井パートナーを持つ 3 次元カラビ・ヤウ多様体のうち最初にミラー多様体が構成された例として大きな関心を呼んだ ([Rød], [HK] 等).

2 一般論からの準備

第 1 章では, 日比トーリック多様体の性質を組合せ論を用いて記述した. 有限半順序集合 P に対して, 順序多面体と呼ばれる $|P|$ 次元の整凸単面体 $\Delta(P)$ が以下のように定義される.

$$\Delta(P) := \left\{ x = (x_u)_{u \in P} \;\middle|\; 0 \leq x_u \leq x_v \leq 1 \text{ for all } u \prec v \in P \right\}.$$

この順序多面体の定める射影トーリック多様体 $\mathbb{P}_{\Delta(P)}$ が日比トーリック多様体である.

日比トーリック多様体の射影結合 (projective join) はまた日比トーリック多様体であり, 日比トーリック多様体の不変部分多様体もまた日比トーリック多様体である. これらはいずれも有限半順序集合の組合せ論を用いて記述され, 特異集合にもまた有限半順序集合の言葉を用いた特徴付けが与えられる. 特に, 有限半順序集合 P が純粋 (pure) なとき, 日比トーリック多様体 $\mathbb{P}_{\Delta(P)}$ はゴレンシュタイン・トーリック・ファノ多様体となり, 従ってその超曲面完全交叉カラビ・ヤウ多様体に対してはバチレフ・ボリゾフによるミラー構成が適用可能になる.

第 2 章では, トーリック退化の一般論とゴンシューラ・ラクシュミバイによる日比トーリック多様体へのトーリック退化の理論を説明した. 特に, ミナスキュール・シューベルト多様体が日比トーリック多様体に退化すること, ゴンシューラ・ラクシュミバイ退化を持つ射影多様体の射影結合もまた日比トーリック多様体に退化することの 2 点が重要である.

第 3 章では, ゴレンシュタイン日比トーリック多様体の一般的な超曲面完全交叉に退化するような, ピカール数 1 の滑らかな 3 次元カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性を議論した. このクラスのカラビ・ヤウ多様体に対しては先述したコニフォルド転移を用いたミラー構成法（予想）が適用可能になる. この構成は滑らかなミラー多様体の存在まで保証するものではないが, ミラー多様体と双有理同値であると期待される, 代数的トーラスまたはトーリック多様体内の超曲面完全交叉の族を与えており, ミラー対称性の議論が可能になる. 例えば, この族の主周期 (fundamental period) に対しては, 有限半順序集合の組合せ論を用いた級数公式が得られる.

3 ミナスキュール・シューベルト多様体の超曲面完全交叉

第 4 章では, ミナスキュール・シューベルト多様体の超曲面完全交叉カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性を議論した. ミナスキュール・シューベルト多様体はグラスマン・シューベルト多様体を筆頭とする性質の良いシューベルト多様体のクラスであり, その幾何的な性質の多くはヤング図の拡張であるミナスキュール半順序集合という有限半順序集合の組合せ論を用いて記述される.

4.5 節では, この組合せ論とトーリック退化 (2 章) を用い, ミナスキュール・シューベルト多様体の超曲面完全交叉となる滑らかな 3 次元カラビ・ヤウ多様体の変形同値類を全てリストし, ケイリー平面 $\mathbb{OP}^2$ の, あるシューベルト多様体 $\mathbf{\Sigma}$ に含まれる新しい例 $\mathbf{\Sigma}(1^9)$ を見つけた.

4.6 節では, $\mathbf{\Sigma}(1^9)$ を例として, ゴレンシュタイン日比トーリック多様体の一般的な超曲面完全交叉に退化するような, ピカール数 1 の滑らかな 3 次元カラビ・ヤウ多様体に対し, コニフォルド転

移を用いて位相不変量を計算する手続きを与えた. 結果得られた $\mathbf{\Sigma}(1^9)$ の位相不変量はミラー対称性から期待されるものと一致するものであった.

4.7 節において, $\mathbf{\Sigma}(1^9)$ のミラー対称性を議論し, ピカール・フックス方程式のモノドロミーの計算や高次種数インスタントン数の計算から, $\mathbf{\Sigma}(1^9)$ が先述の $G(2,7)(1^7)$ と同様に非自明なフーリエ・向井パートナーを持つことが強く示唆される結果を得た.

4 グラスマン多様体 2 つの完全交叉

第 5 章では, 一般の位置にあるいくつかの射影多様体の完全交叉が射影結合の超平面完全交叉と見なせる, という事実に着目しトーリック退化 (2 章) と合わせて, 2 つのグラスマン多様体 $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ の完全交叉カラビ・ヤウ多様体 $(G(2,5)^2)$ のミラー対称性が議論できることを述べた. この例のピカール・フックス方程式には, 同じ $(G(2,5)^2)$ の幾何に由来する 2 つの最大冪等モノドロミー点があり, 主周期は量子レフシェッツ公式 [Kim] の拡張の存在を示唆するような表式を持つ.

参考文献

[Bat] V. V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties.* J. Algebraic Geom. 3 (1994), no.3, 493-535.

[BCFKvS1] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim and D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi–Yau complete intersections in Grassmannians.* Nuclear Phys. B 514 (1998), no.3, 640-666.

[BCFKvS2] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim and D. van Straten, *Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds.* Acta Math. 184 (2000), no.1, 1-39.

[BK] V. V. Batyrev and M. Kreuzer, *Constructing new Calabi–Yau 3-folds and their mirrors via conifold transitions.* Adv. Theor. Math. Phys. 14 (2010), no.3, 879-898.

[Bor] L. A. Borisov, *Towards the mirror symmetry for Calabi–Yau complete intersections in Gorenstein toric Fano varieties.* alg-geom/9310001.

[GL] N. Gonciulea and V. Lakshmibai, *Degenerations of flag and Schubert varieties to toric varieties.* Transform. Groups 1 (1996), no.3, 215-248.

[GP] B. Greene and M. Plesser, *Duality In Calabi-Yau Moduli Space.* Nucl.Phys. B338 (1990), 15-37.

[HK] S. Hosono and Y. Konishi, *Higher genus Gromov-Witten invariants of the Grassmannian, and the Pfaffian Calabi–Yau 3-folds.* Adv. Theor. Math. Phys. 13 (2009), no.2, 463-495.

[Kim] B. Kim, *Quantum hyperplane section theorem for homogeneous spaces.* Acta Math. 183 (1999), no.1, 71-99.

[Rød] E. A. Rødland, *The Pfaffian Calabi–Yau, its mirror, and their link to the Grassmannian* $G(2,7)$. Compositio Math. 122 (2000), no.2, 135-149.