論文審査の結果の要旨

氏名　　宮谷　和尭

自然数 n に対し，超幾何関数 ${}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}A_1,...,A_{n+1}\\B_1,...,B_n\end{matrix};x\right)$ とはパラメーター $A_1,...,A_{n+1}\in\mathbb{C},B_1,...,B_n\in\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ を与えることにより定まる x に関するべき級数であり，Gauss による ${}_2F_1$ の研究以来，数学の多くの分野に現れる重要な関数である．またこの関数の有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の類似として，有限体上の超幾何関数 ${}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}A_1,...,A_{n+1}\\B_1,...,B_n\end{matrix};x\right)_{\mathbb{F}_q}$ が，$\mathbb{F}_q^\times$ 上の指標 $A_1,...,A_{n+1},B_1,...,B_n$ をパラメーターとして与えることにより定まる $\overline{\mathbb{Q}}$ に値をとる $x\in\mathbb{F}_q^\times$ の関数として Greene により定義されている．(有限体上の超幾何関数の定義の仕方は何通りかあるが，ここでは McCarthy による定義を採用する.)

宮谷氏の博士論文は，ある種の超曲面の単項的変形として定義される有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の超曲面の族が上記 2 種の超幾何関数と関係することを明らかにしたものである．$n\geq 2$ を自然数，$c_1,...,c_{n+1}\in\mathbb{F}_q$ とする．また，$1\leq i\leq n+1$ に対して $a_i:=(a_{1i},...,a_{n+1,i})$ を $\sum_{j=1}^{n+1}a_{ji}=n+1$ となる 0 以上の整数の組で $(1,...,1)$ ではないものとし，また a_i 達は相異なるとする．このとき，$\lambda\in\mathbb{F}_q$ に対して X_λ を $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元射影空間内で $n+1$ 次同次式

$$c_1T^{a_1}+\cdots+c_{n+1}T^{a_{n+1}}-\lambda T_1\cdots T_{n+1}\in\mathbb{F}_q[T_1,...,T_{n+1}]$$

(ここで $T^{a_i}:=T_1^{a_{i1}}\cdots T_{n+1}^{a_{n+1,i}}$) により定義される超曲面とし，また X_0 は滑らかであると仮定する．この超曲面の族 $\{X_\lambda\}_\lambda$ が宮谷氏の研究対象である．$c_1=\cdots=c_{n+1}=1,a_i=(0,...,n+1,...,0)$ ($n+1$ は i 番目にあるとする) のときはこれは Dwork 族と呼ばれる有名な族であるが，宮谷氏の場合は Dwork 族とは異なり，対称性を持たない．

宮谷氏の 1 つめの結果は，q が a_i 達 $(1\leq i\leq n+1)$ だけから定まる正整数達 $\alpha_1,...,\alpha_{n+1},\alpha$ と互いに素なときに，滑らかな X_λ の $(n-1)$ 次元クリスタルコホモロジーの Newton polygon の最初の slope および slope $=0$ の場合の unit root と通常の超幾何関数との間のある関係を示したことである：$\tilde{C}\in W(\mathbb{F}_q)^\times$ ($W(\mathbb{F}_q)$ は $\mathbb{F}_q$ の Witt 環) を $C:=\alpha^\alpha\prod_{i=1}^{n+1}\frac{c_i^{\alpha_i}}{\alpha_i^{\alpha_i}}\in\mathbb{F}_q^\times$ の Teichmüller 持ち上げとし，また

$$\mathcal{F}(x):={}_{\alpha-1}F_{\alpha-2}\left(\begin{matrix}\frac{1}{\alpha},...,\frac{\alpha-1}{\alpha}\\\frac{1}{\alpha_1},...,\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1},...,\frac{1}{\alpha_{n+1}},...,\frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}},1,...,1\end{matrix};\tilde{C}x\right)$$

を$W(\mathbb{F}_q)$を係数とする形式的べき級数と見て，$\mathcal{F}_{p-1}(x)$を$\mathcal{F}(x)$の次数$p-1$以下の部分とする．このとき，宮谷氏は滑らかなX_λの$(n-1)$次元クリスタルコホモロジーの Newton polygon の最初の slope が 0 であることと$\mathcal{F}_{p-1}(\lambda^{-\alpha}) \in \mathbb{F}_q$が 0 でないことが同値であり，またこのとき unit-root は適当な意味で$\mathcal{F}(\tilde{\lambda}^{-\alpha})/\mathcal{F}(\tilde{\lambda}^{-q\alpha})$ ($\tilde{\lambda}$はλの Teichmüller 持ち上げ) と書けるということを示した．Dwork 族に対するこの結果は Dwork, Yu により，また Yu–Yui による計算例があるが，宮谷氏の結果はより一般的な場合の興味深い計算例である．証明は$(n-1)$次元$\mathbb{G}_m$係数形式コホモロジーの形式群としての構造を Stienstra の方法に従って計算することによりなされる．

宮谷氏の 2 つめの結果は，$q-1$が$\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}, \alpha$で割り切れるとし，更に$q-1$にある種の合同条件を課したもとで，滑らかで$\lambda^\alpha \neq C, \neq 0$なる$X_\lambda$のゼータ関数$\zeta(X_\lambda, x)$から定まる多項式

$$P(x) = \{\zeta(X_\lambda, x)(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x)\}^{(-1)^n}$$

と有限体上の超幾何関数との関連を示したものである：$\varphi_{\alpha_1}, ..., \varphi_{\alpha_{n+1}}, \varphi_\alpha$をそれぞれ$\mathbb{F}_q^\times$上の位数$\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}, \alpha$の指標とし，$\epsilon$を自明な指標とする．このとき，宮谷氏は$P(x)$が多項式

$$\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} \cdot {}_{\alpha-1}F_{\alpha-2}\mathrm{Red}\left(\begin{matrix} \varphi_\alpha, ..., \varphi_\alpha^{\alpha-1} \\ \varphi_{\alpha_1}, ..., \varphi_{\alpha_1}^{\alpha_1-1}, ..., \varphi_{\alpha_{n+1}}, ..., \varphi_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_{n+1}-1}, \epsilon, ..., \epsilon \end{matrix}; C\lambda^\alpha\right)_{\mathbb{F}_{q^r}}\right)$$

(ここで Red は重複するパラメーターを取り除くことを表す) で割り切れることを示した．更に多項式$P(x)$の$1-q^{(n-1)/2}x$および上記の多項式に似た多項式達による具体的な分解を示している．Dwork 族に対する結果が Koblitz, Katz，Goutet により知られているが宮谷氏はより一般的な場合を含めた結果を出すことに成功している．Katz の手法は有限体上の超幾何関数と関連する$\mathbb{G}_{m,\mathbb{F}_q} \setminus \{1\}$上の滑らかな$l$進層$\mathcal{H}$を用いる方法であり，Koblitz, Goutet の手法はX_λの有理点の個数を直接勘定する方法であるが，宮谷氏の手法はX_λの有理点の個数を勘定する際に滑らかなl進層$\mathcal{H}$の存在をうまく利用して巧みに計算するというものであり，独創性があり巧妙なものである．また，以上の 2 つの結果に現れている 2 種の超幾何関数のパラメーターが類似していることは大変興味深い現象である．

以上に説明した宮谷氏の結果は大変興味深いものであり，本博士論文における研究には充分な意義があると思われる．よって，論文提出者　宮谷和尭　は博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．