

## 論文の内容の要旨

論文題目： Nuclearity of reduced free product  $C^*$ -algebras  
(既約自由積  $C^*$  環の核型性について)

氏名：

鄺 欽 龍

作用素環論は Hilbert 空間上の有界線形作用素のなす自己共役な位相環を研究する分野である。考える位相により、 $C^*$  環 (ノルム位相) と von Neumann 環 (弱位相) に分かれるが、本論文では主に  $C^*$  環の方を取り扱った。作用素環と GNS 忠実な状態の組  $(A_i, \phi_i)$  がふたつ与えられたとき、その既約自由積

$$(A, \phi) = (A_1, \phi_1) * (A_2, \phi_2)$$

を考察することができる。一般の確率論においてテンソル積が独立な系を記述する道具として基本的であるのと同様、自由積の研究は Voiculescu の自由確率論を始めとする量子確率論において中心的な役割を果たしている。ところが自由積の研究にはテンソル積の研究に現れない本質的な技術的困難が存在する。それは非従順性と呼ばれる類のものである。自由積環を構成する際に、性質が良い、あるいは性質が良く分かる環  $(A_i, \phi_i)$  を使ったとしても、大抵の場合、生成される環はそれらの良い性質を受け継がない。例えば、離散群の既約群  $C^*$  環に話を限れば、 $C^*$  環の自由積は群の自由積の  $C^*$  環に他ならないが、群の自由積  $G_1 * G_2$  が従順性と呼ばれる良い性質を持つのは、 $G_1$  と  $G_2$  のいずれかが自明  $\{1\}$  であるときか、 $G_1$  と  $G_2$  の双方が  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (ほぼ自明) であるときに限ることが知られている。 $C^*$  環論において群の従順性に当たる良い性質は核型性と呼ばれる。核型  $C^*$  環は、有限次元の対象でよく近似できる扱いやすいクラスであり、 $C^*$  環の分類理論等でもっとも活発に研究されている作用素環のクラスでもある。本論文では、いつ既約自由積  $C^*$  環  $(A, \phi) = (A_1, \phi_1) * (A_2, \phi_2)$  が核型となるかを調べ完全な解答を得た。

定理.  $(A, \phi)$  が核型であるためには以下の条件が必要十分。 $(A_i, \phi_i)$  は双方とも核型かつ次のいずれかが成り立つ。(1)  $\phi_1$  と  $\phi_2$  のいずれかが純粋状態、(2)  $\phi_1$  と  $\phi_2$  の双方とも二つの同値でない純粋状態の凸結合として書かれる。

必要条件の証明は、von Neumann 環論において先行する Dykema の定理に帰着する形で行った。von Neumann 環論の定理においては、状態が GNS 忠実より強い忠実であることを必要とするので、与えられた自由積とその遺伝的部分環の自由積を Hilbert 双加群により比較することによりこれを実行した。 $C^*$  環、特に今回のように純粋状態を扱うときには状態の忠実性は強すぎる仮定であることを言い添えておく。十分性の証明は、(1) の場合に対する Ozawa の証明を一般化することにより行った。定理の条件のもと得られる核型  $C^*$  環の同型類は、Hilbert 双加群を使ってある程度は記述できたが、完全には決定できていない。それはこれからの課題である。