

本論文において、論文提出者は C^* 環の自由積の核型性について研究を行った。

C^* 環の核型性は古くから研究されている極めて重要な条件で、様々な同値な言い換えがあるが、群の従順性と非常に関連の深い性質である。一方 C^* 環の自由積、特にこの論文で考えている既約自由積は離散群の自由積と関係の深い構成法でこの 20 年くらいにわたって盛んに研究されている。これは Voiculescu の創始した自由確率論 (非可換確率論の一種でランダム行列のとの関係が深い) において重要な構成法である。

離散群の自由積については、「二つの離散群の自由積がいつ従順になるか」という古典的な問題があり、その必要十分条件は「片方が自明で他方が従順であるか、両方の位数が共に 2 である」という極めて限定的なものであることがよく知られている。

本論文ではこの問題の作用素環版を考察した。作用素環版とはすなわち、「二つの作用素環の自由積がいつ従順になるか」という問題であり、考える作用素環の種類により、von Neumann 環版と C^* 環版の 2 種類がある。von Neumann 環の場合は Dykema による 20 年ほど前の結果があり、はっきりした答えが得られているが、その後 C^* 環版の問題は極めて自然な問題であるにもかかわらず放置されて結果が得られていないままであった。本論文では論文提出者はこの C^* 環版の問題について取組み、決定的な解答を得たものである。

von Neumann 環の場合も C^* 環の場合も「特別な場合以外にはめったに従順にならない」という種類の答えが得られるのだが、 C^* 環の場合は既約自由積を考えるために状態を考える必要があり、その状態の凸分解を考えるところが難点である。

本論文ではこの技術的な難点を見事にクリアし、最終的な答えを得たものである。正確に言うと、問題は、二つの C^* 環と状態の組 $(A_1, \varphi_1), (A_2, \varphi_2)$ に対してその既約自由積 $(A_1, \varphi_1) * (A_2, \varphi_2)$ がいつ従順になるか、というものであり、本論文で与えられた答えは「両方の C^* 環 A_1, A_2 が従順であり、さらに、 φ_1, φ_2 の片方が純粋であるか、または両方が非同値な二つの純粋状態の凸結合である」というものである。これは答えを言われてみれば大変自然なものであるが、離散群の場合と比べると「位数が 2」ということの対応条件が「状態が非同値な二つの純粋状態の凸結合である」となるということは簡単に思いつくことではない。また、状態について課している条件も「GNS 表現が忠実である」という極めて弱い条件である。状態自体が忠実であるという強い条件を課すと様々な議論がだいぶ簡単になるのだが、本論文ではそ

のような強い仮定をつけていないことも優れた点である。

よって、論文提出者 LI Qinlong は、博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。